

ITA – 2003

3º DIA

# MATEMÁTICA

## Matemática – Questão 01

Seja  $z \in \mathbb{C}$ . Das seguintes afirmações independentes:

I. Se  $\omega = \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}$ , então  $\bar{\omega} = \frac{-2i\bar{z}^2 + 5z + i}{1 + 3z^2 - 2i\bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$ .

II. Se  $z \neq 0$  e  $\omega = \frac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z}$ , então  $|\omega| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$ .

III. Se  $\omega = \frac{(1+i)z^2}{4\sqrt{3} + 4i}$ , então  $2 \arg z + \frac{\pi}{12}$  é um argumento de  $\omega$ .

é (são) **VERDADEIRA(S)**

A) todas.

C) apenas II e III.

E) apenas II.

B) apenas I e II.

D) apenas I e III.

### RESOLUÇÃO:

I) Números complexos possuem as seguintes propriedades:

(1)  $\overline{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \bar{z}_1 \\ \bar{z}_2 \end{pmatrix}$

(2)  $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(3)  $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$

(4)  $\overline{z^n} = \bar{z}^n$

(5)  $\overline{\bar{z}} = z$

(6) Se  $z$  é real puro  $\bar{z} = z$ , e se  $z$  é imaginário puro,  $\bar{z} = -z$

(7)  $|\bar{z}| = |z|$

Temos, então

$$\bar{\omega} = \overline{\left( \frac{2iz^2 + 5\bar{z} - i}{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|} \right)}$$

pela propriedade (1),

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{2iz^2 + 5\bar{z} - i}}{\overline{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

pela propriedade (2),

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{2iz^2 + 5\bar{z} - i}}{\overline{1 + 3\bar{z}^2 + 2iz + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

pela propriedade (3),

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{2i \cdot \bar{z}^2 + 5 \cdot \bar{\bar{z}} - i}}{\overline{1 + 3 \cdot \bar{\bar{z}}^2 + 2i \cdot \bar{z} + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

pela propriedade (4),

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{2i \cdot \bar{z}^2 + 5 \cdot \bar{\bar{z}} - i}}{\overline{1 + 3 \cdot \bar{\bar{z}}^2 + 2i \cdot \bar{z} + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

pela propriedade (5),

$$\bar{\omega} = \frac{\overline{2i \cdot \bar{z}^2 + 5 \cdot z - i}}{\overline{1 + 3 \cdot z^2 + 2i \cdot \bar{z} + 3|z|^2 + 2|z|}}$$

lembrando que  $|z|$  é real, pela propriedade (6),

$$\bar{\omega} = \frac{-2i \cdot \bar{z}^2 + 5 \cdot z + i}{1 + 3 \cdot z^2 - 2i \cdot \bar{z} + 3|z|^2 + 2|z|}$$

por fim, pela propriedade (7),

$$\bar{\omega} = \frac{-2i \cdot \bar{z}^2 + 5 \cdot z + i}{1 + 3 \cdot z^2 - 2i \cdot \bar{z} + 3|\bar{z}|^2 + 2|z|}$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

II)

$$|\omega| = \left| \frac{2iz + 3i + 3}{(1 + 2i)z} \right|$$

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{|(1 + 2i)z|}$$

$$|\omega| = \frac{|2iz + 3i + 3|}{|(1 + 2i)||z|}$$

Como  $|u + v| \leq |u| + |v|$ , para todo  $u$  e  $v$  complexos, temos que

$$|\omega| \leq \frac{|2iz| + |3i + 3|}{|(1 + 2i)||z|}$$

$$|\omega| \leq \frac{|2i||z| + |3i + 3|}{\sqrt{5}|z|}$$

$$|\omega| \leq \frac{2|z| + 3\sqrt{2}}{\sqrt{5}|z|}$$

Logo, a afirmação é verdadeira.

III) Note que

$$1 + i = \sqrt{2} \cdot \text{cis}(\pi/4)$$

$$4\sqrt{3} + 4i = 8 \cdot \text{cis}(\pi/6)$$

$$z = \rho \cdot \text{cis}(\arg z)$$

Logo, temos

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \text{cis}(\pi/4) \cdot (\rho \cdot \text{cis}(\arg z))^2}{8 \cdot \text{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \text{cis}(\pi/4) \cdot \rho^2 \cdot \text{cis}(2 \arg z)}{8 \cdot \text{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \rho^2}{8} \cdot \frac{\text{cis}(\pi/4) \cdot \text{cis}(2 \arg z)}{\text{cis}(\pi/6)}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \rho^2}{8} \cdot \text{cis}(\pi/4 - \pi/6 + 2 \arg z)$$

$$\omega = \frac{\sqrt{2} \cdot \rho^2}{8} \cdot \text{cis}(\pi/12 + 2 \arg z)$$

$$\arg \omega = \arg \left( \frac{\sqrt{2} \cdot \rho^2}{8} \cdot \text{cis}(\pi/12 + 2 \arg z) \right)$$

$$\arg \omega = \pi/12 + 2 \arg z$$

E assim, a afirmação é verdadeira.

Como todas as afirmativas estão corretas, a alternativa verdadeira é a de letra A.

**Gabarito:** Letra **A**

## Matemática – Questão 02

O valor de  $y^2 - xz$ , para o qual os números  $\text{sen} \frac{\pi}{12}$ ,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $\text{sen} 75^\circ$ , nesta ordem, formam uma progressão aritmética, é:

A)  $3^{-4}$

C)  $6^{-2}$

E)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

B)  $2^{-6}$

D)  $2^{-5}$

### RESOLUÇÃO:

Considerando que os termos  $x$ ,  $y$  e  $z$  estão em P.A, podemos desenvolver a expressão cujo valor foi pedido, obtendo

$$\begin{aligned}y^2 - xy &= y^2 - (y - r) \cdot (y + r) \\ &= y^2 - (y^2 - r^2) \\ &= r^2\end{aligned}$$

Logo, precisamos da razão da P.A. Como os termos trigonométricos ocupam em uma P.A posições distantes de 4 unidades uma da outra, temos

$$\text{sen } 75^\circ - \text{sen } 15^\circ = 4r$$

$$\text{sen } (45^\circ + 30^\circ) - \text{sen } (45^\circ - 30^\circ) = 4r$$

$$\cancel{\text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} + \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 45^\circ - \cancel{\text{sen } 45^\circ \cdot \cos 30^\circ} + \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 4r$$

$$2 \cdot \text{sen } 30^\circ \cdot \cos 45^\circ = 4r$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4r$$

$$r = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

Logo, temos que  $y^2 - xy = r^2 = 1/32 = 2^{-5}$ , o que nos leva à alternativa D.

**Gabarito:** Letra **D**

## Matemática – Questão 03

Considere a função

$$f = \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{3^{x-2}} (9^{2x+1})^{1/(2x)} - (3^{2x+5})^{1/x} + 1$$

A soma de todos os valores de  $x$  para os quais a equação  $y^2 + 2y + f(x) = 0$  tem raiz dupla é

A) 0

C) 2

E) 6

B) 1

D) 4

### RESOLUÇÃO:

Para que a equação de segundo grau tenha raiz dupla, é necessário que seu discriminante seja nulo, portanto

$$\Delta = 0$$

$$2^2 - 4 \cdot 1 \cdot f(x) = 0$$

$$f(x) = 1$$

$$\sqrt{3^{x-2}} (9^{2x+1})^{1/(2x)} - (3^{2x+5})^{1/x} + 1 = 1$$

$$3^{(x-2)/2} \left( (3^2)^{2x+1} \right)^{1/(2x)} - 3^{(2x+5)/x} = 0$$

$$3^{(x-2)/2} \cdot 3^{(2x+1)/x} = 3^{(2x+5)/x}$$

$$3^{\frac{x^2+2x+2}{2x}} = 3^{\frac{2x+5}{x}}$$

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{2x} = \frac{2x + 5}{x}$$

Como  $x \neq 0$ , vem que

$$x^2 - 2x - 8 = 0$$

cuja soma das raízes é, por Girard, igual a 2.

**Gabarito:** Letra C

## Matemática – Questão 04

Considere uma função  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  não constante e tal que

$$f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Das afirmações:

I.  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

II.  $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III.  $f$  é par.

É (são) **VERDADEIRA(S)**

A) apenas I e II.

B) apenas II e III.

C) apenas I e III.

D) todas.

E) nenhuma.

### RESOLUÇÃO:

I) Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , temos que

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2$$

Como  $f(x/2) \in \mathbb{R}$ , então  $[f(x/2)]^2 \geq 0$ , conseqüentemente,  $f(x) \geq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

Para que a afirmativa seja verdadeira, falta provar que não existe valor  $u$  no domínio para o qual  $f(u) = 0$ . Suponhamos, pois, a existência de tal real  $u$ . Teríamos, então, para todo  $x$  do domínio, que  $f(x) = f(u + (x - u)) = f(u).f(x - u) = 0$ . Então teríamos que  $f(x) = 0$  para todo  $x$  real, o que contraria a condição do enunciado, segundo a qual a função não é constante. Logo, não existe um real  $u$  conforme foi especificado, e então a afirmativa é verdadeira.

II) Provemos o que foi pedido por PIF:

i) Para  $n = 1$ , temos  $f(1.x) = f(x) = [f(x)]^1$ , e então para  $n = 1$  a afirmação é verdadeira.

ii) Supondo que a afirmação é válida para  $n = k$ , temos que

$$f(kx) = [f(x)]^k$$

Multiplicando ambos os lados por  $f(x)$ , temos

$$(f(x).) f(kx) = [f(x)]^k (.f(x))$$

$$f(x).f(kx) = [f(x)]^{k+1}$$

e, aplicando ao lado esquerdo da equação a propriedade da função dada no enunciado, temos

$$f(x + kx) = [f(x)]^{k+1}$$

$$f((k+1)x) = [f(x)]^{k+1}$$

ou seja, a afirmação é válida para  $k + 1$ .

Por PIF, a afirmativa está provada para todo  $x$  real.

III) Primeiramente, temos que  $f(0) = f(0 + 0) = f(0).f(0) = [f(0)]^2$ , o que faz com que  $f(0) = 1$  ou  $f(0) = 0$ . Porém, como provado anteriormente,  $f(x) > 0$  para todo  $x$  real, e então devemos ter  $f(0) = 1$ .

Temos então que

$$f(x - x) = f(x).f(-x)$$

$$f(0) = f(x).f(-x)$$

$$1 = f(x).f(-x)$$

$$f(-x) = 1/f(x)$$

Note que é impossível que  $f(x) = 1/f(x)$  em todo o domínio, pois para tal seria necessário que  $f(x) = 1$  para todo valor de  $x$ , o que é impossível, pois a função não pode ser contínua. Logo, temos que

$$f(-x) = 1/f(x) \neq f(x)$$

E então a afirmativa é falsa.

**Gabarito:** Letra **A**

## Matemática – Questão 05

Considere o polinômio  $P(x) = 2x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , cujos coeficientes  $2, a_2, \dots, a_n$  formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão  $q > 0$ . Sabendo que  $-\frac{1}{2}$  é uma raiz de  $P$  e que  $P(2) = 5460$ , tem-se que o valor de  $\frac{n^2 - q^3}{q^4}$  é igual a

A)  $5/4$

C)  $7/4$

E)  $15/8$

B)  $3/2$

D)  $11/6$

### RESOLUÇÃO:

Sabendo que os coeficientes do polinômio estão em PG, o polinômio

$$P(x) = 2x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

se transforma em

$$P(x) = 2x + 2qx^2 + 2q^2x^3 + \dots + 2q^{n-1}x^n$$

note que, estando os coeficientes do polinômio em PG de razão  $q$ , os termos do polinômio enquadram-se em uma PG de razão  $qx$ . Assim, aplicando a fórmula da soma dos termos da PG finita, temos

$$P(x) = \frac{2x \cdot (q^n x^n - 1)}{qx - 1}$$

Como  $-1/2$  é raiz, temos que

$$P(-1/2) = \frac{-1 \cdot (q^n (-1/2)^n - 1)}{q/2 - 1} = 0$$

$$(-q/2)^n = 1$$

como  $q > 0$  (pelo enunciado), então é necessário ter  $n$  par (pois não é possível um número negativo elevado a um número ímpar resultar em um número positivo), e ainda  $q = 2$ . Dessa forma, o polinômio fica da forma

$$P(x) = \frac{2x \cdot (2^n x^n - 1)}{2x - 1}$$

Substituindo o valor  $P(2) = 5460$  na expressão anterior, obtemos

$$5460 = \frac{4 \cdot (2^{2n} - 1)}{4 - 1}$$

$$22^n - 1 = 4095$$

$$22^n = 2^{12}$$

$$n = 6$$

Logo,

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{36 - 8}{16} = \frac{7}{4}$$

**Gabarito:** Letra **C**

## Matemática – Questão 06

Dividindo-se o polinômio  $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$  por  $x - 1$ , obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se  $P(x)$  por  $x + 1$ , obtém-se resto igual a 3. Sabendo que  $P(x)$  é divisível por  $x - 2$ , tem-se que o valor de  $\frac{ab}{c}$  é igual a

A) -6

C) 4

E) 9

B) -4

D) 7

### RESOLUÇÃO:

Pelo teorema do resto, temos:

$$\begin{cases} P(1) = 2 \\ P(-1) = 3 \\ P(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + a + b + c + 1 = 2 \\ -1 + a + b - c + 1 = 3 \\ 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0 \end{cases}$$

isolando os termos independentes e reescrevendo as equações através de sua matriz dos coeficientes, fica

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 16 & 4 & 2 & -33 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 2 & -33 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 16 & 4 & 0 & -30 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right] \sim \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 9/2 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

$$a = -3 ; b = 9/2 ; c = -3/2$$

logo, a expressão pedida vale

$$\frac{ab}{c} = \frac{-3 \cdot 9/2}{-3/2} = 9$$

**Gabarito:** Letra **E**

## Matemática – Questão 07

Das informações a seguir sobre a equação  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$  e suas soluções no plano complexo:

- I. A equação possui pelo menos um par de raízes reais.
  - II. A equação possui duas raízes de módulo 1, uma raiz de módulo menor que 1 e uma raiz de módulo maior que 1.
  - III. Se  $n \in \mathbb{N}^*$  e  $r$  é uma raiz qualquer, então  $\sum_{k=1}^n \left| \frac{r}{3} \right|^k < \frac{1}{2}$ .
- É (são) **VERDADEIRA(S)**

- A) nenhuma.
- B) apenas I.
- C) apenas II.
- D) apenas III.
- E) apenas I e III

### RESOLUÇÃO:

Note que, para  $z \neq 1$ ,  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = (z^5 - 1)/(z - 1)$ . Essa substituição não afeta as raízes, pois  $z = 1$ , único termo para o qual as expressões divergem de valor, não é raiz de nenhuma delas. Portanto, para termos  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ , devemos ter  $(z^5 - 1)/(z - 1) = 0$ , e então  $z^5 = 1$ . Utilizando a forma trigonométrica ( $z = \rho \cdot \text{cis } \theta$ ), temos que

$$(\rho \cdot \text{cis } \theta)^5 = 1 \cdot \text{cis } 0$$

$$\rho^5 \cdot \text{cis } 5\theta = 1 \cdot \text{cis } 0$$

$\rho = 1$  (as soluções encontram-se, no plano de Argand-Gauss, sobre a circunferência de centro na origem e raio 1)

$5\theta = 2k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Como  $0 \leq \theta < 2\pi$  e  $\theta \neq 0$  (pois queremos  $z \neq 1$ ), devemos ter  $5\theta = 2\pi$ ,  $5\theta = 4\pi$ ,  $5\theta = 6\pi$  ou  $5\theta = 8\pi$ , o que nos leva a  $S = \{2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5\}$ . Julguemos, pois, as afirmativas

- I. Falso. A equações não possui raízes reais.
- II. Falso. Como  $\rho = 1$ , todas as soluções têm módulo unitário.
- III. Como todos os termos do somatório são positivos, quanto maior  $n$ , maior o risco de a afirmativa ser falsa. Portanto, se a afirmativa for verdadeira para  $n \rightarrow \infty$ , será verdadeira para todo  $n$ . Como o módulo de todas as soluções é unitário, podemos reescrever o somatório como segue

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{|z|}{3} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{\rho}{3} \right)^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{3} \right)^k$$

que é a soma dos termos de uma PG infinita. Como sabemos, tal soma é dada pela equação

$$S_{\infty} = \frac{a_0}{1 - q} \therefore S_{\infty} = \frac{1/3}{1 - 1/3} \therefore S_{\infty} = \frac{1}{2}$$

Logo, como não é possível pegar infinitos termos em uma soma, o valor do somatório nunca ultrapassará  $1/2$ , e então a afirmativa é verdadeira.

**Gabarito:** Letra **D**



## Matemática – Questão 09

Considere o conjunto  $S = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a + b = 18\}$ . A soma de todos os números da forma  $\frac{18!}{a!b!}$ ,  $\forall (a,b) \in S$ , é;

- A)  $8^6$                       C)  $9^6$                       E)  $12!$   
B)  $9!$                       D)  $12^6$

### RESOLUÇÃO:

Substituindo  $b = 18 - a$  na expressão cujo valor foi pedido, temos

$$\frac{18!}{a!b!} = \frac{18!}{a!(18-a)!} \therefore \frac{18!}{a!b!} = C_{18,a}$$

$$\sum_{a=1}^{18} \frac{18!}{a!b!} = \sum_{a=1}^{18} C_{18,a}$$

Note agora que esse somatório é o somatório dos termos de uma linha do triângulo de Pascal, e então

$$\sum_{a=1}^{18} \frac{18!}{a!b!} = 2^{18} = 8^6$$

**Gabarito:** Letra **A**

## Matemática – Questão 10

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é

A) 24

C) 48

E) 72

B) 36

D) 54

### RESOLUÇÃO:

Decompondo 17640 em fatores primos, obtemos  $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2$ . Para compor divisores de 17640, podemos pegar diferentes proporções de cada fator desses:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & & \\ 2 & 2 & & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \end{array}$$

Para que os divisores pegos sejam múltiplos de 3, a única restrição é que o expoente do 3 não pode ser o 0:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & & \\ 2 & & & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \end{array}$$

Logo, temos quatro possibilidades de expoentes para o fator dois, duas para o fator três, duas para o fator cinco e três para o fator sete. Logo, o total de divisores possíveis é  $4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 48$ .

PS.: Nesse exercício, calculamos a quantidade de divisores naturais que atendiam ao enunciado. Se considerássemos divisores inteiros, a resposta seria o dobro, mas como não há essa alternativa, subentende-se que se trata dos divisores naturais.

**Gabarito:** Letra **C**

## Matemática – Questão 11

Sejam  $A$  e  $P$  matrizes  $n \times m$  inversíveis e  $B = P^{-1}AP$ . Das afirmações:

- I.  $B^T$  é inversível e  $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$
- II. Se  $A$  é simétrica, então  $B$  também o é.
- III.  $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

é(são) **VERDADEIRA(S)**

- A) todas.
- B) apenas I.
- C) apenas I e II.
- D) apenas I e III.
- E) apenas II e III

### RESOLUÇÃO:

I.  $B = P^{-1}AP$

Tirando o determinante de ambos os lados, temos

$$\det B = \det (P^{-1}AP)$$

$$\det B = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P$$

$$\det B = \cancel{(\det P)^{-1}} \cdot \det A \cdot \cancel{\det P}$$

$$\det B = \det A$$

e, como  $A$  é inversível,  $\det A \neq 0$ , e então  $\det B \neq 0$ . Como  $\det B = \det B^T$ , então  $\det B^T \neq 0$ , e então  $B^T$  também é inversível. A afirmação  $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$  é uma conhecida propriedade de matrizes inversíveis.

II. Suponha, por exemplo, que temos  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  e  $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  que satisfazem às condições do

enunciado. Temos, assim, que  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{bmatrix}$ , e então

$$B = P^{-1}AP$$

$$B = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/6 \\ -1/3 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5/6 & -1/3 \\ -1/6 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1/6 & -13/6 \\ 7/6 & 17/6 \end{bmatrix}$$

Como percebemos,  $B$  não é simétrica, e então a afirmativa é falsa.

$$\text{III. } B = P^{-1}AP$$

Subtraindo  $\lambda I$  de ambos os lados, temos que

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda I$$

Como  $P^{-1}P = I$ , vê-se que  $B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P$

Como  $\lambda$  é escalar e a multiplicação de matriz por escalar é comutativa, podemos rearranjar os termos de forma que  $B - \lambda I = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P$

Colocando  $P^{-1}$  em evidência à esquerda, temos  $B - \lambda I = P^{-1}(AP - \lambda P)$

Colocando  $P$  em evidência à direita, temos  $B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$

Tirando o determinante de ambos os lados, pelo teorema de Binet vem que

$$\det(B - \lambda I) = \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P$$

$$\det(B - \lambda I) = (\det P)^{-1} \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det P$$

$$\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$$

E então a afirmativa é verdadeira.

**Gabarito:** Letra **D**

## Matemática – Questão 12

O número de todos os valores de  $a \in [0, 2\pi]$ , distintos, para os quais o sistema nas incógnitas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , dado por

$$\begin{cases} -4x + y - 6z = \cos 3a \\ x + 2y - 5z = \sin 2a \\ 6x + 3y - 4z = -2\cos a \end{cases}$$

é possível e não homogêneo, é igual a:

- A) 2
- B) 3
- C) 4
- D) 5
- E) 6

### Resolução:

Primeiramente, vamos analisar o determinante da matriz dos coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & -5 \\ 6 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 32 - 30 - 18 + 72 - 60 + 4 = 0$$

ou seja, ou o sistema é impossível, ou possível e indeterminado. Para que seja possível, como pede o enunciado, o termo independente da linha nula que aparecer ao escalonarmos a matriz, tem que também ser nulo. Observe a matriz que representa o sistema:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -6 & \cos 3a \\ 1 & 2 & -5 & \sin 2a \\ 6 & 3 & -4 & -2\cos a \end{array} \right]$$

Note que a linha nula pode ser obtida pela soma  $L_3 + L_1 - 2L_2$ , o que nos dá o termo independente  $-2\cos a + \cos 3a - 2\sin 2a$ . Igualando-o a zero, temos

$$-2\cos a + \cos 3a - 2\sin 2a = 0$$

$$-2\cos a + \cos 2a \cdot \cos a - \sin 2a \cdot \sin a - 2\sin 2a = 0$$

$$\cos a \cdot (\cos 2a - 2) - \sin 2a \cdot (\sin a + 2) = 0$$

$$\cos a \cdot (\cos^2 a - \sin^2 a - 2) - 2\sin a \cdot \cos a \cdot (\sin a + 2) = 0$$

$$\cos a \cdot (\cos^2 a - \sin^2 a - 2) + \cos a \cdot (-2\sin^2 a - 4\sin a) = 0$$

$$\cos a \cdot (\cos^2 a - 3\sin^2 a - 4\sin a - 2) = 0$$

$$\cos a \cdot (\cos^2 a + \sin^2 a - 4\sin^2 a - 4\sin a - 2) = 0$$

$$\cos a \cdot (1 - 4\sin^2 a - 4\sin a - 2) = 0$$

$$\cos a \cdot (-4\sin^2 a - 4\sin a - 1) = 0$$

$$\cos a = 0 \rightarrow a = \pi/2 \text{ ou } a = 3\pi/2 \text{ (soluções inválidas, pois tornam o sistema homogêneo)}$$

ou

$$4.\text{sen}^2 a + 4.\text{sen} a + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 - 16$$

$$\text{sen} a = -4/8$$

$$\text{sen} a = -1/2$$

$$a = 7\pi/6 \text{ ou } a = 11\pi/6 \text{ (soluções válidas)}$$

Logo, as condições do problema são satisfeitas para dois valores.

**Gabarito:** Letra **A**



## Matemática – Questão 13

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ , a expressão  $[\cos(2x)]^2 \cdot [\sin(2x)]^2 \cdot \sin x$  é igual a

- A)  $2^{-4} \cdot [\sin 2x + \sin 5x + \sin 7x]$
- B)  $2^{-4} \cdot [2 \sin x + \sin 7x - \sin 9x]$
- C)  $2^{-4} \cdot [-\sin(2x) - \sin(3x) + \sin(7x)]$
- D)  $2^{-4} \cdot [-\sin x + 2 \sin(5x) - \sin(9x)]$
- E)  $2^{-4} \cdot [\sin x + 2 \sin(3x) + \sin(5x)]$

### Resolução:

$$[\cos(2x)]^2 \cdot [\sin(2x)]^2 \cdot \sin x =$$

Ajeitando os termos, temos

$$\frac{1}{2} 2 \sin 2x \cos 2x \cdot \frac{1}{4} 2 \cdot 2 \sin 2x \cos 2x \cdot \sin x =$$

$$\frac{1}{2} \sin 4x \cdot \frac{1}{4} 2 \sin 4x \cdot \sin x =$$

$$\frac{1}{8} \sin 4x \cdot (2 \sin 4x \cdot \sin x) =$$

Somando e subtraindo  $\cos 4x \cdot \cos x$  ao interior do parênteses, temos que

$$\frac{1}{8} \sin 4x \cdot (\cos 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \sin x - \cos 4x \cdot \cos x + \sin 4x \cdot \sin x) =$$

$$\frac{1}{8} \sin 4x \cdot (\cos(4x - x) - \cos(4x + x)) =$$

$$\frac{1}{16} 2 \sin 4x \cdot (\cos(3x) - \cos(5x)) =$$

$$\frac{1}{16} (2 \sin 4x \cdot \cos 3x - 2 \sin 4x \cdot \cos 5x) =$$

$$\frac{1}{16} (\sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cos 4x + \sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 3x \cos 4x +$$

$$+ \sin 5x \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 5x - \sin 5x \cos 4x - \sin 4x \cdot \cos 5x) =$$

$$\frac{1}{16} (\sin(4x + 3x) + \sin(4x - 3x) + \sin(5x - 4x) - \sin(5x + 4x)) = 2^{-4} (2 \sin x + \sin 7x - \sin 9x)$$

**Gabarito:** Letra B

## Matemática – Questão 14

Considere os contradomínios das funções arco-seno, e arco-cosseno como sendo  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  e  $[0, \pi]$ , respectivamente. Com respeito à função  $f : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) = \arcsen x + \arccos x$ , temos que

- A) F é não-crescente e ímpar.
- B) F não é par nem ímpar.
- C) F é sobrejetora.
- D) F é injetora.
- E) F é constante.

### Resolução:

Seja  $a = \arcsen x$  e  $b = \arccos x$ , temos

$$x = \sen a$$

e

$x = \cos b = \sen(\pi/2 - b)$  (esse valor é compatível com os contradomínios das funções  $\arcsen$  e  $\arccos$ , pois o domínio da função  $\arcsen$  é justamente atrasado de  $\pi/2$  em relação ao da função  $\arccos$ ).

Igualando as duas expressões para  $x$ , temos

$$\sen a = \sen(\pi/2 - b)$$

Mas, como esse seno é a função inversa de um arco-seno, ele carrega no domínio a restrição do contradomínio do arco-seno. Nesse domínio restrito, a equação acima se reduz

$$a = \pi/2 - b$$

$$a + b = \pi/2$$

$$\arcsen x + \arccos x = \pi/2$$

Logo  $f(x)$  é uma função constante.

**Gabarito:** Letra **E**

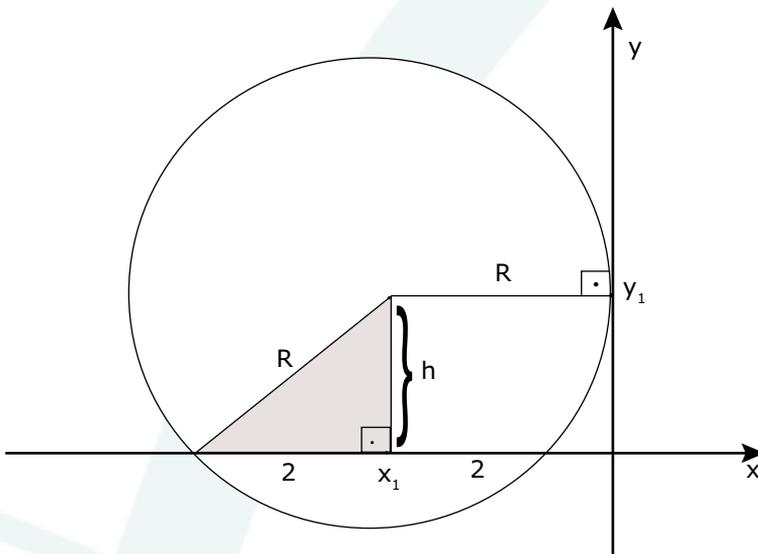
## Matemática – Questão 15

Considere a família de circunferências com centros no segundo quadrante e tangentes ao eixo Oy. Cada uma destas circunferências corta o eixo Ox em dois pontos, distantes entre si de 4 cm. Então, o lugar geométrico dos centros destas circunferências é parte

- A) de uma elipse.
- B) de uma parábola.
- C) de uma hipérbole.
- D) de duas retas concorrentes.
- E) da reta  $y = -x$

### RESOLUÇÃO:

Temos a situação descrita como ilustrado a seguir



Sejam  $(x_1, y_1)$  as coordenadas genéricas dos centros das circunferências dessa família. Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo retângulo hachurado, temos

$$2^2 + h^2 = R^2$$

que podemos reescrever como

$$\frac{R^2}{4} - \frac{h^2}{4} = 1$$

Note, entretanto, que  $x_1 = -R$  e  $y_1 = h$ . Substituindo esses dados na expressão anterior, temos

$$\frac{(-x_1)^2}{4} - \frac{y_1^2}{4} = 1 \therefore \frac{x_1^2}{4} - \frac{y_1^2}{4} = 1$$

o que é a equação de uma hipérbole: "Como há restrições aos valores de  $x_1$  e  $y_1$ , o lugar geométrico dos centros das circunferências dessa família é uma parte dessa hipérbole."

**Gabarito:** Letra **C**

## Matemática – Questão 16

A área do polígono, situado no primeiro quadrante, que é delimitado pelos eixos coordenados e pelo conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 + 5xy - 9x - 8y + 6 = 0\}$ , é igual a

A)  $\sqrt{6}$

C)  $2\sqrt{2}$

E)  $\frac{10}{3}$

B)  $\frac{5}{2}$

D) 3

### RESOLUÇÃO:

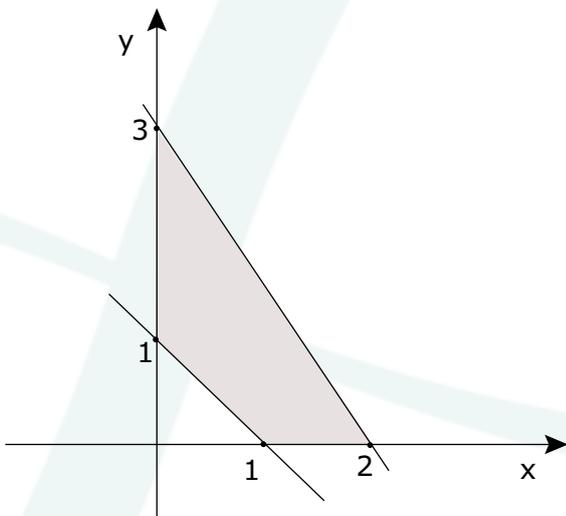
Podemos rearranjar a equação do enunciado da seguinte forma  $3x^2 + (5y - 9)x + (2y^2 - 8y + 6) = 0$  e então resolver a equação quadrática em  $x$ .

$$\Delta = 25y^2 - 90y + 81 - 12(2y^2 - 8y + 6)$$

$$\Delta = y^2 + 6y + 9 = (y + 3)^2$$

$$x = \frac{-5y + 9 \pm (y + 3)}{6} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -y + 1 \\ x_2 = \frac{-2y}{3} + 2 \end{cases}$$

Assim, o conjunto dado pela equação do enunciado é composto pelas retas  $y = -x + 1$  e  $y = 3 - 3x/2$ . Observe, no esquema a seguir, o polígono determinado por essas retas e pelos eixos coordenados:



Como percebemos, a área hachurada pode ser calculada pela diferença das áreas dos triângulos determinados por cada reta com os eixos coordenados. Numericamente, temos

$$A = \frac{3 \cdot 2}{2} - \frac{1 \cdot 1}{2} \therefore A = \frac{5}{2}$$

**Gabarito:** Letra B

## Matemática – Questão 17

Sejam  $r$  e  $s$  duas retas paralelas distando entre si 5 cm. Seja  $P$  um ponto na região interior a estas retas, distando 4 cm de  $r$ . A área do triângulo equilátero  $PQR$ , cujos vértices  $Q$  e  $R$  estão, respectivamente, sobre as retas  $r$  e  $s$ , é igual, em  $\text{cm}^2$ , a

A)  $3\sqrt{15}$

C)  $5\sqrt{6}$

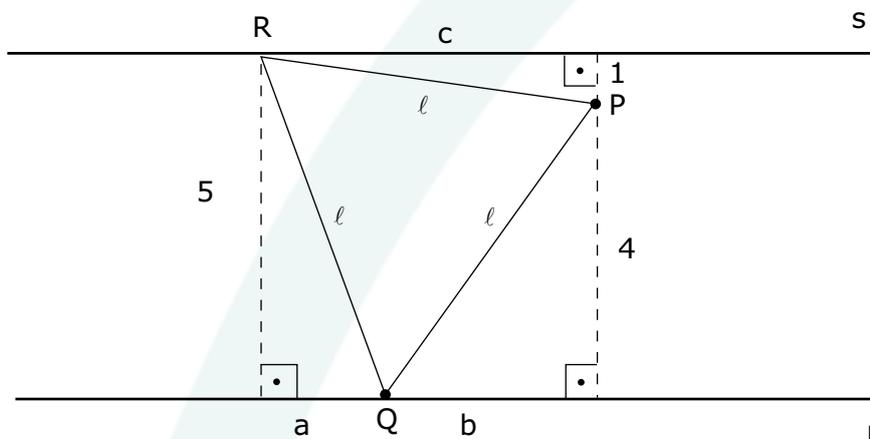
E)  $\frac{7}{2}\sqrt{15}$

B)  $7\sqrt{3}$

D)  $\frac{15}{2}\sqrt{3}$

### Resolução:

Na situação descrita, traçando por  $P$  e por  $R$  segmentos auxiliares perpendiculares a  $r$  e a  $s$ , obtemos três triângulos retângulos, conforme esquematizado a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras aos três triângulos retângulos, temos

$$a^2 + 25 = \ell^2 \quad a = \sqrt{\ell^2 - 25}$$

$$b^2 + 16 = \ell^2 \Rightarrow b = \sqrt{\ell^2 - 16}$$

$$c^2 + 1 = \ell^2 \quad c = \sqrt{\ell^2 - 1}$$

Entretanto, pelos paralelismos da situação, vemos claramente no desenho que  $a + b = c$ . Logo

$$\sqrt{\ell^2 - 25} + \sqrt{\ell^2 - 16} = \sqrt{\ell^2 - 1}$$

$$\ell^2 - 25 + \ell^2 - 16 + 2\sqrt{(\ell^2 - 16)(\ell^2 - 25)} = \ell^2 - 1$$

$$2\sqrt{(\ell^2 - 16)(\ell^2 - 25)} = 40 - \ell^2$$

$$4(\ell^4 - 41\ell^2 + 400) = 1600 - 80\ell^2 + \ell^4$$

$$3\ell^4 - 84\ell^2 = 0$$

$$\ell^2(3\ell^2 - 84) = 0$$

$$\ell = 0 \text{ (inconsistente)}$$

ou

$$\ell^2 = 28$$

A área do triângulo é dada por

$$A = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A = 7\sqrt{3}$$

**Gabarito:** Letra B

## Matemática – Questão 18

Considere três polígonos regulares tais que os números que expressam a quantidade de lados de cada um constituam uma progressão aritmética. Sabe-se que o produto destes três números é igual a 585 e que a soma de todos os ângulos internos dos três polígonos é igual a  $3780^\circ$ . O número total das diagonais nestes três polígonos é igual a

A) 63

C) 90

E) 106

B) 69

D) 97

### RESOLUÇÃO:

Sejam  $n_1 = n - r$ ,  $n_2 = n$  e  $n_3 = n + r$  os números de lados de cada polígono. Pela soma dos ângulos internos, temos

$$(n - r - 2) \cdot 180^\circ + (n - 2) \cdot 180^\circ + (n + r - 2) \cdot 180^\circ = 3780^\circ$$

$$(n - r - 2 + n - 2 + n + r - 2) \cdot 180^\circ = 3780^\circ$$

$$3n - 6 = 21$$

$$n = 9$$

Substituindo essa informação no dado do enunciado de que  $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 585$ , resulta

$$n_1 \cdot n_3 = 5 \cdot 13$$

Como  $n_1$  e  $n_3$  são naturais, com  $n_3 > n_1$ , pelo Teorema Fundamental da Aritmética há então duas possibilidades:

$$(n_1, n_2, n_3) = (5, 9, 13) \text{ ou } (n_1, n_2, n_3) = (1, 9, 65)$$

Evidentemente, apenas na primeira opção os termos se encontram em P.A. Portanto, temos como total de diagonais do polígonos

$$C_{13,2} - 13 + C_{9,2} - 9 + C_{5,2} - 5 =$$

$$\frac{13 \cdot 12}{2} - 13 + \frac{9 \cdot 8}{2} - 9 + \frac{5 \cdot 4}{2} - 5 =$$

$$78 - 13 + 36 - 9 + 10 - 5 = 97$$

**Resposta:** Alternativa **D**

## Matemática – Questão 19

Considere o triângulo isósceles  $OAB$ , com lados  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  de comprimento  $\sqrt{2}R$  e lado  $\overline{AB}$  de comprimento  $2R$ . O volume do sólido, obtido pela rotação deste triângulo em torno da reta que passa por  $O$  e é paralela ao lado  $\overline{AB}$ , é igual

A)  $\frac{\pi}{2}R^3$

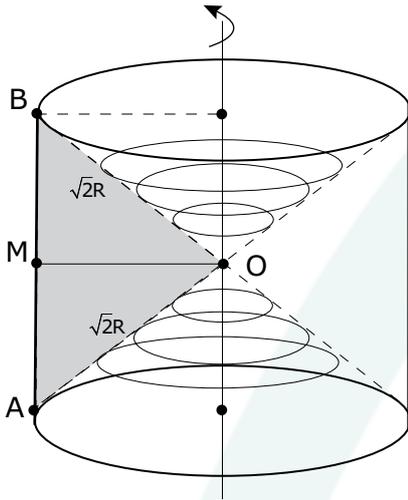
C)  $\frac{4\pi}{3}R^3$

E)  $\sqrt{3}\pi R^3$

B)  $\pi R^3$

D)  $\sqrt{2}\pi R^3$

**Resolução:**



Observe o desenho anterior. Seja  $M$  o ponto médio de  $\overline{AB}$ , note que, como  $\triangle AOB$  é isósceles retângulo,  $\triangle BOM$  também o é, e então  $OM = MB = AB/2 = R$ . O volume pedido é o volume do cilindro (de raio  $OM = R$  e altura  $2R$ ) menos o volume dos dois cones inscritos ao cilindro, que são idênticos. Fazendo as contas,

$$V = V_{\text{cilindro}} - 2V_{\text{cone}}$$

$$V = \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R$$

$$V = \left( \frac{6}{3} - \frac{2}{3} \right) \pi R^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

**COMENTÁRIO:**

Observe que, não por coincidência, o volume do sólido é igual ao volume de uma esfera de raio  $R$ . Isso se deve ao fato de o sólido cujo volume foi pedido ser a anticlépsidra, cujo volume, pelo princípio de Cavalieri, podemos demonstrar ser igual ao volume da esfera.

**Gabarito:** Letra **C**

## Matemática – Questão 20

Considere uma pirâmide regular de altura igual a 5 cm e cuja base é formada por um quadrado de área igual  $8 \text{ cm}^2$ . A distância de cada face desta pirâmide ao centro de sua base, em cm, é igual a

A)  $\frac{\sqrt{15}}{3}$

C)  $\frac{4\sqrt{3}}{5}$

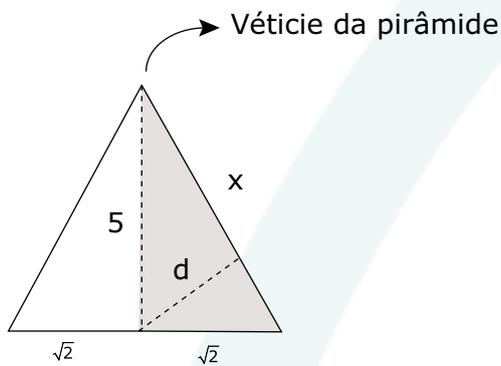
E)  $\sqrt{3}$

B)  $\frac{5\sqrt{6}}{9}$

D)  $\frac{7}{5}$

### Resolução:

Note que um quadrado de área  $8 \text{ cm}^2$  tem lado valendo  $2\sqrt{2} \text{ cm}$ . Considere na pirâmide a seção definida por um plano que passa por seu vértice e é perpendicular à base e a duas faces opostas. Tal seção aparece ilustrada a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo hachurado, temos

$$x^2 = 25 + 2$$

$$x = 3\sqrt{3}$$

Igualando duas diferentes expressões para a área do mesmo triângulo hachurado, obtemos

$$\frac{d \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{5 \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow d = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{9}$$

**Gabarito:** Letra **B**

## Matemática – Questão 21

Sejam  $U$  um conjunto não-vazio e  $A \subset U$ ,  $B \subset U$ . Usando apenas as definições de igualdade, reunião, interseção e complementar, **PROVE** que

I. Se  $A \cap B = \emptyset$ , então  $B \subset A^c$ .

II.  $B \setminus A^c = B \cap A$ .

### RESOLUÇÃO:

I.

$$B \subset U \Leftrightarrow B \cap U = B$$

Como, pela definição de complementar,  $A \cup A^c = U$ , da equação anterior temos

$$B \cap (A \cup A^c) = B$$

$$(B \cap A) \cup (B \cap A^c) = B$$

Como, pelo enunciado,  $B \cap A = \emptyset$ , vem que

$$B \cap A^c = B$$

E conseqüentemente  $B \subset A^c$ .

II.

$$B \setminus A^c = \{x \in U / x \in B \text{ e } x \notin A^c\}$$

Entretanto, pelo conceito de complementar, sabemos que  $\forall x \in U$ ,  $x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$ , e então o conjunto  $B \setminus A^c$  pode ser reescrito como

$$B \setminus A^c = \{x \in U / x \in B \text{ e } x \in A\}$$

O que é, pela definição, a interseção dos conjuntos  $A$  e  $B$ .

$$B \setminus A^c = B \cap A$$

## Matemática – Questão 22

Determine o conjunto dos números complexos  $z$  para os quais o número

$$\omega = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1|} - 3}$$

pertence ao conjunto dos números reais.

Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e **FAÇA** um esboço do mesmo.

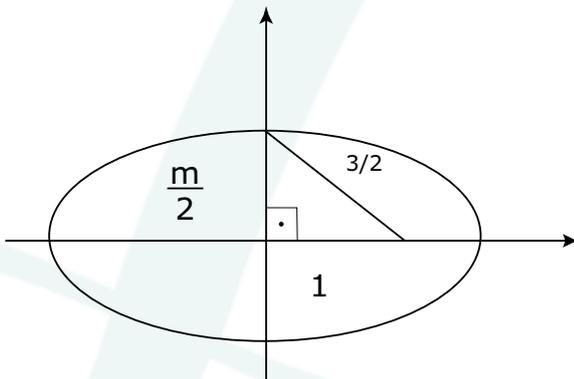
### RESOLUÇÃO:

Seja  $z = a + bi$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , o numerador da expressão vale  $a + bi + a - bi + 2 = 2a + 2$

o que é sempre um número real. Então, para que  $\omega$  seja um número real, o denominador precisa ser real e não nulo:

$$\sqrt{|z-1| + |z+1|} - 3 > 0 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow |z-1| + |z+1| - 3 > 0 \Leftrightarrow |z-1| + |z+1| > 3$$

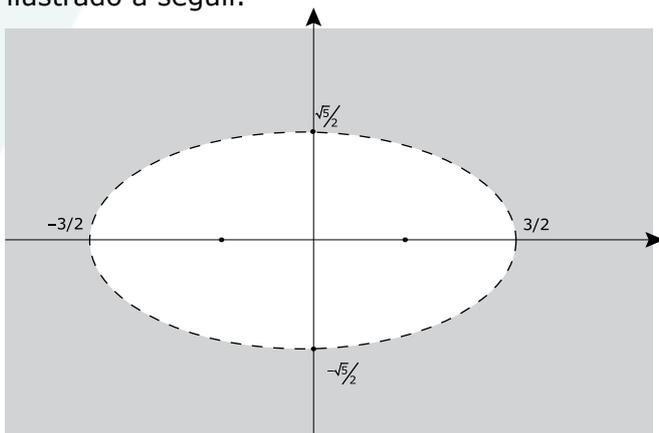
Traduzindo para português a inequação anterior, temos que, para que um dado ponto do plano complexo pertença ao conjunto desejado, a distância (módulo) dele até o ponto  $(1, 0)$  somada à distância dele ao ponto  $(-1, 0)$  tem que ser superior a três. Como sabemos, uma elipse é o conjunto dos pontos cuja distância até um ponto específico (um dos focos) somada à distância até outro ponto específico (o outro foco) é constante (igual à medida do eixo maior). Então, o conjunto pedido é o dos pontos exteriores a uma elipse. A medida do semieixo menor pode ser calculada através do teorema de Pitágoras, como na ilustração a seguir:



$$\frac{m^2}{4} + 1 = \frac{9}{4} \Rightarrow m = \sqrt{5}$$

O conjunto dos números complexos pedido é composto pelos pontos do plano complexo exteriores à

elipse de focos  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$  e que passa pelos pontos  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ ,  $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ,  $\left(0, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$  e  $\left(0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ , conforme ilustrado a seguir.



## Matemática – Questão 23

Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eleia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes  $v_A$  e  $v_T$ , com  $0 < v_T < v_A$ . Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante  $t = 0$  a uma distância  $d_1 > 0$  na frente de Aquiles. Calcule os tempos  $t_1, t_2, t_3, \dots$ , que Aquiles precisa para percorrer as distâncias  $d_1, d_2, d_3, \dots$ , respectivamente, sendo que, para todo  $n \geq 2$ ,  $d_n$  denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante  $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$  da corrida.

Verifique que os termos  $t_k, k = 1, 2, 3, \dots$ , formam uma progressão geométrica infinita. **DETERMINE** a soma e dê o significado desta soma.

### RESOLUÇÃO:

No início da corrida ( $t = 0$ ), a tartaruga se encontra a uma distância  $d_1$  de Aquiles. Para percorrer essa distância, Aquiles gasta  $t_1 = d_1/v_A$ . Simultaneamente, a tartaruga percorre  $d_2 = v_T t_1 = v_T d_1/v_A$ . Posteriormente, para percorrer a distância  $d_2$ , Aquiles gasta  $t_2 = d_2/v_A = (v_T d_1/v_A)/v_A = v_T d_1/v_A^2$ . Nesse intervalo de tempo, a tartaruga percorre  $d_3 = v_T t_2 = v_T v_T d_1/v_A^2 = v_T^2 d_1/v_A^2$ . Para percorrer  $d_3$ , Aquiles gastará  $t_3 = d_3/v_A = (v_T^2 d_1/v_A^2)/v_A = v_T^2 d_1/v_A^3$ ; e assim sucessivamente, enquanto Aquiles percorre a distância  $d_n$  em um tempo  $t_n$ , simultaneamente a tartaruga percorre mais uma distância  $d_{n+1}$  que Aquiles terá que percorrer no instante seguinte. A cada ciclo, o tempo que Aquiles gasta para percorrer a nova distância é igual ao tempo que ele gastou para percorrer a distância anterior multiplicado por  $v_T/v_A$ , de forma que os  $t_k$  constituem uma PG de termo inicial  $a_1 = d_1/v_A$  e razão  $q = v_T/v_A$ . Note que, como  $v_T < v_A$ , temos  $q < 1$ , e então está definida como sendo  $S = \frac{a_1}{1 - q}$  a soma dos infinitos termos dessa PG. Dessa forma,

temos que a soma dos infinitos termos da PG descrita pelos  $t_k$  vale

$$S = \frac{d_1 / v_A}{1 - v_T / v_A}$$
$$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}$$

Como os  $t_k$  são os intervalos de tempo gastos para que Aquiles percorra as distâncias recursivamente menores entre ele e a tartaruga, a soma desses valores é o tempo gasto por Aquiles para percorrer toda a distância que o afasta da tartaruga, e então é o tempo que Aquiles gastará para alcançá-la.

$$S = \frac{d_1}{v_A - v_T}. S \text{ é o tempo que Aquiles gasta para alcançar a tartaruga.}$$

## Matemática – Questão 24

**MOSTRE** que toda função  $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , satisfazendo  $f(xy) = f(x) + f(y)$  em todo seu domínio, é par.

### RESOLUÇÃO:

Para todo real  $x$ , podemos definir  $a = x^2$ . Sabemos que  $x^2 = (-x)^2 = a$ . Aplicando esses dados à equação que descreve a propriedade da função, temos

$$\left. \begin{array}{l} f(a) = f(x \cdot x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \\ f(a) = f((-x) \cdot (-x)) = f(-x) + f(-x) = 2f(-x) \end{array} \right\} 2f(x) = 2f(-x) \Rightarrow f(x) = f(-x)$$

E então a função é par para todo  $x$  pertencente ao domínio.

## Matemática – Questão 25

Sejam  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  constantes reais. Sabendo que a divisão de  $P_1(x) = x^4 + ax^2 + b$  por  $P_2(x) = x^2 + 2x + 4$  é exata, e que a divisão de  $P_3(x) = x^3 + cx^2 + dx - 3$  por  $P_4(x) = x^2 - x + 2$  tem resto igual a  $-5$ , **DETERMINE** o valor de  $a + b + c + d$ .

### RESOLUÇÃO:

Seja  $Q_1(x)$  o quociente da divisão  $P_1(x)/P_2(x)$ . Temos que  $P_1(x) = Q_1(x) \cdot P_2(x)$ , e como  $P_1$  é de grau 4 e  $P_2$  é de grau 2,  $Q_1$  deve ser de grau 2. Note que, como o coeficiente do termo de grau 4 de  $P_1$  é 1 e o coeficiente do termo de grau 2 de  $P_2$  também é 1, o coeficiente do termo de grau 2 de  $Q_1$  também tem que ser 1. Portanto, representemo-lo genericamente por  $Q_1(x) = x^2 + ux + v$ .

Temos que

$$x^4 + ax^2 + b = (x^2 + ux + v) \cdot (x^2 + 2x + 4)$$

$$x^4 + ax^2 + b = x^4 + (u + 2)x^3 + (4 + v + 2u)x^2 + (4u + 2v)x + 4v$$

Igualando os coeficientes de cada dois termos de mesmo grau, encontramos

$$\begin{cases} u + 2 = 0 \\ a = 4 + v + 2u \\ 4u + 2v = 0 \\ 4v = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = -2 \\ v = 4 \\ b = 16 \\ a = 4 \end{cases}$$

Analogamente, temos que  $P_3(x) = P_4(x) \cdot Q_2(x) + R_2(x)$ . Note que o grau de  $P_3$  é 3 e o de  $P_4$  é 2, de forma que o grau de  $Q_2$  deve ser 1. Note ainda que, novamente, o coeficiente do termo de maior grau de  $P_3$  é igual ao coeficiente do termo de maior grau de  $P_4$ , e então o termo de maior grau de  $Q_2$  deve ser 1. Temos que

$$x^3 + cx^2 + dx - 3 = (x^2 - x + 2)(x + w) - 5$$

$$x^3 + cx^2 + dx - 3 = x^3 + (w - 1)x^2 + (2 - w)x + (2w - 5)$$

$$\begin{cases} w - 1 = c \\ 2 - w = d \\ 2w - 5 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = 1 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

Conforme os valores anteriormente encontrados, temos que  $a + b + c + d = 21$ .

## Matemática – Questão 26

Sejam  $a, b, c$  e  $d$  números reais não-nulos. **EXPRIMA** o valor do determinante da matriz na forma de um produto de números reais.

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

**Resolução:**

$$D = \begin{vmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por  $a$ , a segunda por  $b$ , a terceira por  $c$  e a quarta por  $d$ , temos

$$abcd \cdot D = \begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Agora, dividindo a primeira coluna por  $abcd$ , vemos que

$$\frac{abcd}{abcd} \cdot D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

E então fica evidente que se trata do determinante de Vandermonde, que pode ser calculado pela fórmula  $D = (b - a)(c - a)(d - a)(c - b)(d - b)(d - c)$ .

## Matemática – Questão 27

**ENCONTRE** todos os valores de  $a \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$  para as quais a equação na variável real  $x$ ,

$$\arctg\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\arctg\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)=a$$

admite solução.

### Resolução:

Aplicando a função tangente a ambos os lados da equação, ela se transforma em

$$\operatorname{tga}=\operatorname{tg}\left(\arctg\left(\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}\right)+\arctg\left(\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}\right)\right)$$

Aplicando a fórmula da tangente da soma e lembrando que, no intervalo dado,  $\operatorname{tg}(\arctg \theta)=\theta$ , temos

$$\operatorname{tga}=\frac{\sqrt{2}-1+\frac{e^x}{2}+\sqrt{2}-1-\frac{e^x}{2}}{1-\left(\left(\sqrt{2}-1\right)+\frac{e^x}{2}\right)\left(\left(\sqrt{2}-1\right)-\frac{e^x}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tga}=\frac{2\sqrt{2}-2}{1-\left(\left(\sqrt{2}-1\right)^2-\frac{e^{2x}}{4}\right)}$$

$$\operatorname{tga}=\frac{8\sqrt{2}-8}{-8+8\sqrt{2}+e^{2x}}$$

$$e^{2x}=\frac{8\sqrt{2}-8}{\operatorname{tga}}-8\sqrt{2}+8 \Rightarrow e^{2x}=(8\sqrt{2}-8)\left(\frac{1-\operatorname{tga}}{\operatorname{tga}}\right)$$

Para que a equação anterior tenha solução em  $x$ , é necessário e suficiente que o lado direito da equação seja maior que zero, e como o primeiro parênteses já o é, é necessário que o segundo também seja.

$$\frac{1-\operatorname{tga}}{\operatorname{tga}}>0 \Rightarrow \begin{cases} \text{se } 1-\operatorname{tga}>0, \text{ então } \operatorname{tga}>0 \rightarrow 0<\operatorname{tga}<1 \rightarrow 0<a<\pi/4 \\ \text{se } 1-\operatorname{tga}<0, \text{ então } \operatorname{tga}<0 \rightarrow \text{Não fornece soluções reais} \end{cases}$$

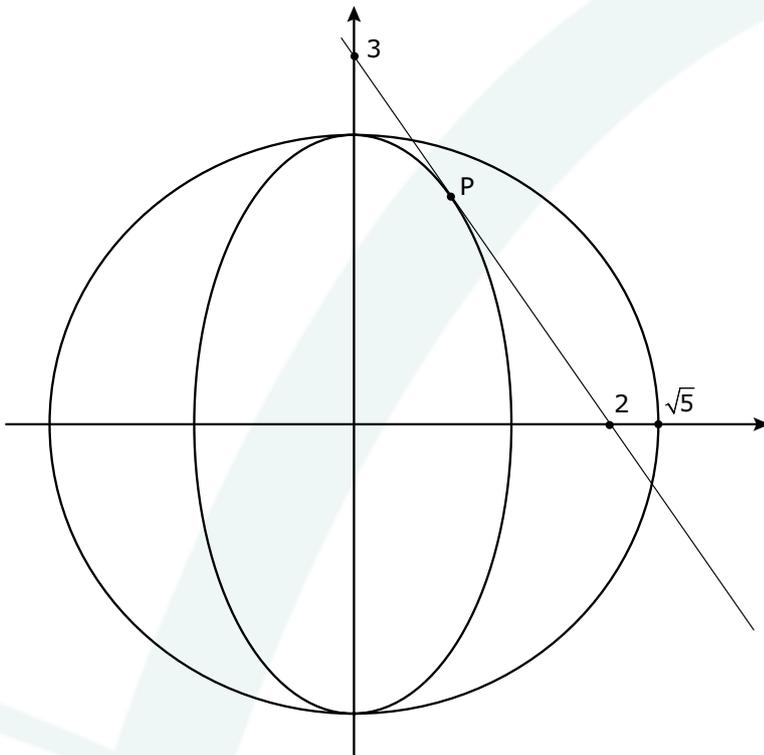
**Resposta:**  $0 < a < \pi/4$

## Matemática – Questão 28

Sabe-se que uma elipse de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  tangencia internamente a circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 5$  e que a reta de equação  $3x + 2y = 6$  é tangente à elipse no ponto P. **DETERMINE** as coordenadas de P.

### RESOLUÇÃO:

Observe a ilustração a seguir, que esquematiza a situação descrita:



A parte positiva do eixo  $x$  intercepta a circunferência em  $x = \sqrt{5}$  e a reta em  $x = 2$ . Como  $\sqrt{5} > 2$  o semieixo maior da elipse, que está alinhada com os pontos de contato entre elipse e circunferência, tem que estar sobre o eixo  $y$ , pois caso contrário a reta não seria tangente à elipse (para chegar ao ponto  $(\sqrt{5}, 0)$  da circunferência a elipse teria que cruzar a reta). Como a elipse e a reta se tangenciam internamente, temos que  $b = R = \sqrt{5}$ . Utilizando esse dado e fazendo a interseção entre reta e elipse, temos que

$$\left. \begin{array}{l} 5x^2 + a^2y^2 = 5a^2 \\ y = 3 - 3x/2 \end{array} \right\} 5x^2 + a^2 \left( 9 - 9x + \frac{9x^2}{4} \right) = 5a^2$$

$$(20 + 9a^2)x^2 - 36a^2x + 16a^2 = 0$$

$$\Delta = 1296.a^4 - 64.a^2(20 + 9a^2)$$

$$\Delta = 720.a^4 - 1280.a^2$$

Entretanto, como há apenas um ponto de interseção entre a reta e a elipse, a equação da interseção deve retornar apenas um valor de  $y$  e um de  $x$ , e por isso o  $\Delta$  deve ser nulo:

$$720.a^4 - 1280.a^2 = 0$$

$$a^2 = 16/9 \rightarrow a = 4/3$$

Continuando a resolução da equação quadrática em  $x$

$$x = \frac{36a^2}{40 + 18a^2}$$

Substituindo o valor de a, temos então

$$x = \frac{36 \cdot \frac{16}{9}}{40 + 18 \cdot \frac{16}{9}} \Rightarrow x = \frac{8}{9}$$

Substituindo esse valor na equação da reta, temos

$$3 \cdot \frac{8}{9} + 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{5}{3}$$

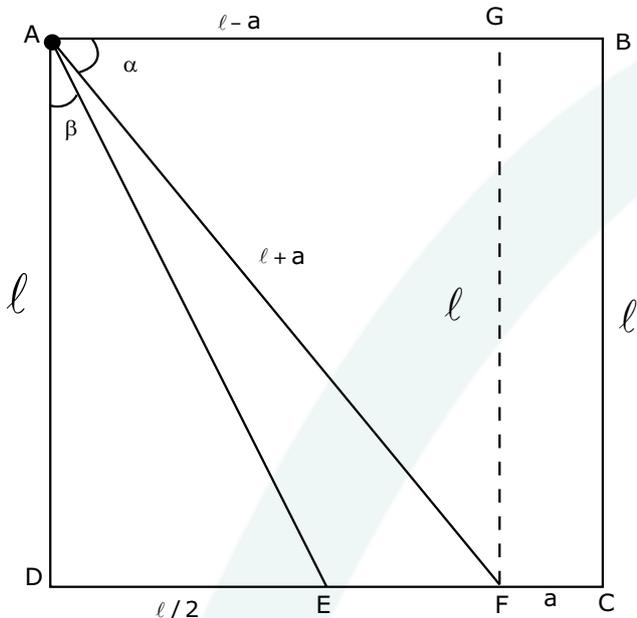
**Resposta:**  $P\left(\frac{8}{9}, \frac{5}{3}\right)$

## Matemática – Questão 29

Considere um quadrado ABCD. Sejam E o ponto médio do segmento  $\overline{CD}$  e F um ponto sobre o segmento  $\overline{CE}$  tal que  $m(\overline{BC}) + m(\overline{CF}) = m(\overline{AF})$ . Prove que  $\cos \alpha = \cos 2\beta$ , sendo os ângulos  $\alpha = \widehat{BAF}$  e  $\beta = \widehat{EAD}$ .

### Resolução:

Seja a situação como esquematizada na ilustração a seguir:



Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo AfG, temos  $(\ell - a)^2 + \ell^2 = (\ell + a)^2$

$$\cancel{\ell^2} + \cancel{a^2} - 2a\ell + \ell^2 = \cancel{\ell^2} + \cancel{a^2} + 2a\ell$$

Como  $\ell \neq 0$ , vem que

$$a = \frac{\ell}{4}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo ADE, vemos que  $AE = \frac{\ell\sqrt{5}}{2}$

Aplicando, então, as relações trigonométricas aos triângulos retângulos ADE e AFG, vemos que

$$\cos \beta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \text{sen} \beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \frac{3}{5}$$

E então

$$\cos 2\beta =$$

$$\cos^2 \beta - \text{sen}^2 \beta =$$

$$4/5 - 1/5 =$$

$$3/5 = \cos \alpha$$

Ou seja,  $\cos 2\beta = \cos \alpha$ .

## Matemática – Questão 30

Quatro esferas de mesmo raio  $R > 0$  são tangentes externamente duas a duas, de forma que seus centros formam um tetraedro regular com arestas de comprimento  $2R$ . **DETERMINE**, em função de  $R$ , a expressão do volume do tetraedro circunscrito às quatro esferas.

### RESOLUÇÃO:

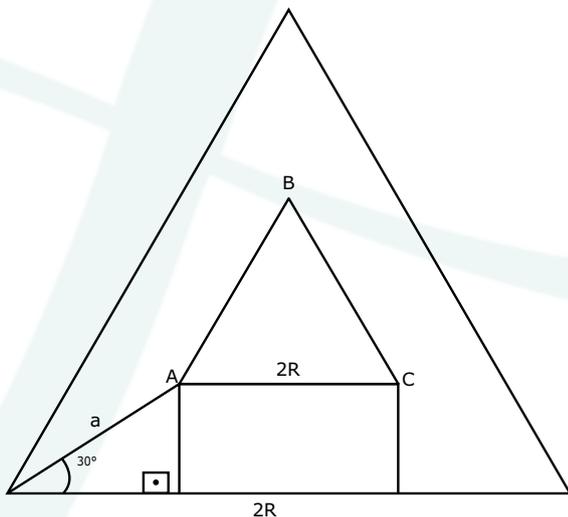
Considere primeiramente os seguintes dados:

$$\text{Altura de um tetraedro de lado } l: h = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

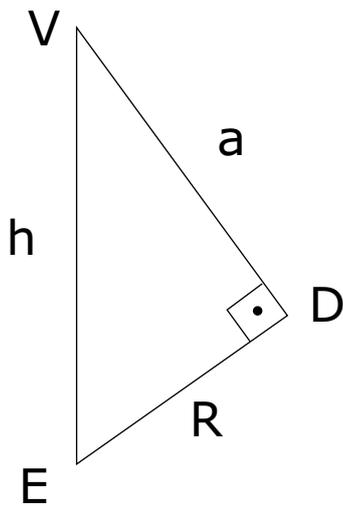
$$\text{Volume de um tetraedro de lado } l: V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$$

Considere as ilustrações (1) e (2) a seguir. (1) ilustra uma das faces do tetraedro grande, em que estão marcados os pontos  $A$ ,  $B$  e  $C$  de contato entre o plano e as três esferas que o tocam. O triângulo  $ABC$  que aparece na imagem é a projeção da face, do tetraedro menor, que é paralela à face do tetraedro maior que está representada. As marcações de ângulos se devem ao fato de as faces do tetraedro serem triângulos equiláteros e às simetrias da situação. Observe o comprimento  $a$  assinalado. Ele é a distância entre um ponto de tangência e o vértice mais próximo. Observe agora a figura (2). Nela, está representada parte de uma seção feita no tetraedro de modo que o plano seccionador passa por dois vértices e pela metade do segmento que liga os outros dois vértices. Mais especificamente, no desenho  $D$  é um ponto de tangência entre uma esfera e uma face do tetraedro grande,  $V$  é um vértice,  $E$  é o centro de uma esfera e, conseqüentemente, o segmento  $VE$  pertence à altura do tetraedro maior. Note que, como o segmento  $VD$  também é a distância entre um ponto de tangência e o vértice mais próximo, ele também tem comprimento  $a$ .

Ilustração 1



## Ilustração 2



Quaisquer dois tetraedros são semelhantes. Em especial, os dois do problema. Utilizando essa semelhança, estabeleçamos uma relação entre seus lados e suas alturas:

$$\frac{l_{\text{maior}}}{l_{\text{menor}}} = \frac{h_{\text{maior}}}{h_{\text{menor}}}$$

Sabemos que  $l_{\text{menor}} = 2R$ , e então  $h_{\text{menor}} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}$

Sabemos ainda, pela figura (1), que  $l_{\text{maior}} = 2R + 2.a.\text{sen } 60^\circ$ . Note agora que  $h_{\text{maior}}$  vale a soma de  $R$ , que é a distância de uma face do tetraedro grande à face correspondente do tetraedro pequeno, com a altura do tetraedro pequeno, que já conhecemos, com  $\sqrt{R^2 + a^2}$  pelo triângulo retângulo da figura 2. Jogando esses valores, obtemos

$$\frac{2R + 2.a.\text{sen } 60^\circ}{2R} = \frac{R + \frac{2R\sqrt{6}}{3} + \sqrt{R^2 + a^2}}{\frac{2R\sqrt{6}}{3}}$$

$$\frac{4R^2\sqrt{6}}{3} + 4Ra \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2R^2 + \frac{4R^2\sqrt{6}}{3} + 2R\sqrt{R^2 + a^2}$$

$$a\sqrt{2} - R = \sqrt{R^2 + a^2}$$

$$\cancel{2}a^2 + \cancel{R}^2 - 2\sqrt{2}Ra = \cancel{R}^2 + \cancel{a}^2$$

$$a = 2\sqrt{2}R$$

Portanto, o lado do tetraedro grande é  $l_{\text{maior}} = 2R + 2 \cdot 2\sqrt{2}R \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow l_{\text{maior}} = 2R(1 + \sqrt{6})$

$$\text{E seu volume é } V = \frac{(2R(1 + \sqrt{6}))^3 \sqrt{2}}{12} \Rightarrow V = \frac{8\sqrt{2}R^3(1 + \sqrt{6})^3}{12} \Rightarrow V = \frac{2\sqrt{2}R^3(1 + \sqrt{6})^3}{3}$$

**Resposta:**  $V = \frac{2\sqrt{2}R^3(1 + \sqrt{6})^3}{3}$