MATEMÁTICA

CALCULE o número natural n que torna o determinante a seguir igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Por Chio, tem-se

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n+1)+\log_2(n-1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} = 5$$

$$\log_2(n-1)+\log_2(n+1)+\log_2(n-1)+\log_2(n-1) = 5$$

$$\log_2\left[(n-1)^3 \cdot (n+1)\right] = 5$$

$$(n-1)^3 \cdot (n+1) = 2^5$$

Como n é natural, pelo Teorema Fundamental da Aritmética devemos ter n – 1 e n + 1 potências de 2, logo $\boxed{n = 3}$.

Matemática – Questão 02

Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, **DEMONSTRE** que $a < 0$.

RESOLUÇÃO:

Sejam f e g funções reais de variável real tais que $f(x) = x^3$ e $g(x) = -ax - b$.

i) Notemos que f é crescente.

ii) Se $a \geq 0$, então $-a \leq 0$ e g é não crescente.

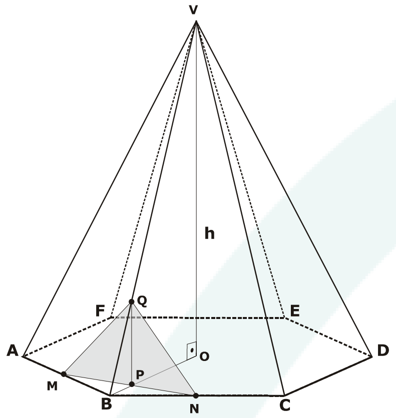
De i e ii vem que para valores de a não negativos teremos $f(x) = g(x)$ uma única vez para x real, ou seja, a equação algébrica

$$x^3 = -ax - b$$
$$x^3 + ax + b = 0$$

terá uma única raiz real. Sabendo que P tem mais de uma raiz real, pois o enunciado tratou "suas raízes" no plural, concluímos que a deve ser negativo.

Considere uma pirâmide regular de altura h, cuja base é um hexágono ABCDEF de lado a. Um plano perpendicular à base e contendo os pontos médios das arestas AB e BC divide a pirâmide em dois poliedros. **CALCULE** o razão entre os volumes destes dois poliedros.

RESOLUÇÃO:

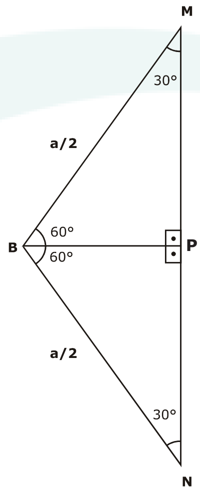


$BP = \frac{a}{4}$

$MP = PN = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$A_{BMN} = \frac{\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}.\text{sen}120º}{2}$

$A_{BMN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$



Da semelhança entre os triângulos VBO e QBP, tem-se

$$\frac{PQ}{VO} = \frac{BP}{BO} \Leftrightarrow \frac{PQ}{h} = \frac{\frac{a}{4}}{a} \Rightarrow PQ = \frac{h}{4}$$

Sendo V_1 o volume do tetraedro BNMQ, V o da pirâmide original e V_2 o do sólido com vértices nos pontos M, N, C, D, E, F, A, Q e V, temos:

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{a^2\sqrt{3}}}{16}\cdot\frac{\cancel{h}}{\cancel{4}} \\ V &= \frac{1}{\cancel{3}}\cdot 6\cdot\frac{\cancel{a^2\sqrt{3}}}{\cancel{4}}\cdot\cancel{h} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{V}{V_1} = 96$$

$$\therefore \frac{V_2}{V_1} = \frac{V - V_1}{V_1} = \frac{V}{V_1} - 1 = 96 - 1 = 95$$

$$\boxed{\frac{V_2}{V_1} = 95}$$

CALCULE sen(x + y) em função de a e b, sabendo que o produto ab ≠ 0, que sen x + sen y = a e que cos x + cos y = b.

RESOLUÇÃO:

Transformando as somas em produto, temos:

$$\operatorname{sen}(x)+\operatorname{sen}(y)=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=a\quad(\mathrm{I})$$

$$\cos(x)+\cos(y)=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}=b\quad(\mathrm{II})$$

Dividindo (I) por, (II) temos:

$$\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}=\frac{a}{b}$$ e daí;

lembrando que $\operatorname{sen}x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$, temos:

$$\operatorname{sen}(x+y)=\frac{2\frac{a}{b}}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}=\frac{2\frac{a}{b}}{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=\frac{2ab}{a^2+b^2}$$

$$\boxed{\operatorname{sen}(x+y)=\frac{2ab}{a^2+b^2}}$$

Seja uma função $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$, em que $\mathbb{R}$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a / b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f.

DEMONSTRE que f é uma função par.

RESOLUÇÃO:

Da definição decorre que:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) \\ f\left(\dfrac{-a}{-b}\right) = f(-a) - f(-b) \end{cases}$$

Adicionando as duas equações:

$$2 \cdot f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) + f(-a) - f(-b) \quad (\mathrm{I})$$

Analogamente para a razão $-\dfrac{a}{b}$, temos:

$$\begin{cases} f\left(\dfrac{-a}{b}\right) = f(-a) - f(b) \\ f\left(\dfrac{a}{-b}\right) = f(a) - f(-b) \end{cases}$$

$$\therefore 2f\left(\frac{-a}{b}\right) = f(a) - f(b) + f(-a) - f(-b) \quad (\mathrm{II})$$

De I e II vem que:

$f\left(\dfrac{a}{b}\right) = f\left(\dfrac{-a}{b}\right)$, para todo $\dfrac{a}{b}$ no domínio da função, logo f é par.

Sendo a, b e c números naturais em progressão aritmética e z um número complexo de módulo unitário, **DETERMINE** um valor para cada um dos números a, b, c e z de forma que eles satisfaçam a igualdade:

$$\frac{1}{z^a}+\frac{1}{z^b}+\frac{1}{z^c}=z^9$$

RESOLUÇÃO:

Tomando $w=\frac{1}{z}$, temos:

$w^a+w^b+w^c=\left(\frac{1}{w}\right)^9$ e $|w|=1$

Como (a, b, c) é uma P.A., tem-se

$w^a+w^{a+r}+w^{a+2r}=w^{-9}$, em que r é a razão da P.A.

$$1+w^r+w^{2r}=w^{-9-a}$$

Fazendo $w^{2r}=-1$ e $w^r=w^{-9-a}$ e lembrando que r é inteiro podemos tomar w = i e r = 1 para a primeira equação e observando a segunda temos $i^1=i^{-9-a}\Rightarrow -9-a=4k+1\Rightarrow a=-10-4k$, tomando $k=-3$ tem-se $a=2$.

Finalmente, uma solução poderia ser:

$a=2$, $b=3$, $c=4$ e $z=\frac{1}{i}=-i$

Considere a parábola P de equação $y = ax^2$, com $a > 0$ e um ponto A de coordenadas (x_0, y_0) satisfazendo a $y_0 < ax_0^2$. Seja S a área do triângulo ATT′, em que T e T′ são os pontos de contato das tangentes a P passando por A.

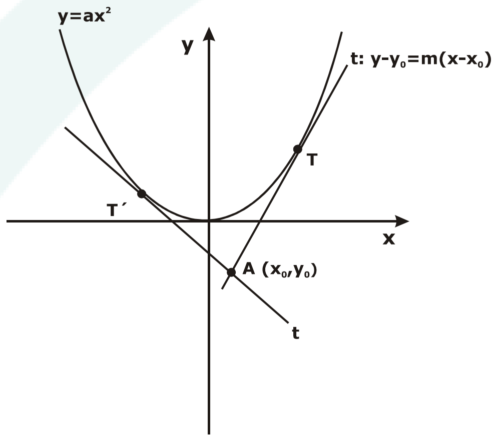
A) **CALCULE** o valor da área S em função de a, x_0 e y_0.

B) **CALCULE** a equação do lugar geométrico do ponto A, admitindo que a área S seja constante.

C) **IDENTIFIQUE** a cônica representada pela equação obtida no item anterior.

RESOLUÇÃO:

A) Fazendo a interseção entre a reta tangente e a parábola temos:



$$\begin{cases} y = ax^2 \\ y - y_0 = m(x - x_0) \end{cases}$$

$$ax^2 - mx + mx_0 - y_0 = 0$$

$$\Delta = 0$$
$$m^2 - 4 \cdot a \cdot (mx_0 - y_0) = 0$$
$$m^2 - 4 \cdot a \cdot x_0 \cdot m + 4 \cdot a \cdot y_0 = 0$$

$$m = \frac{4ax_0 \pm \sqrt{16a^2x_0^2 - 16ay_0}}{2}$$

$$m = 2ax_0 \pm 2\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}\ (\text{um valor para T e outro para T`})$$

voltando em I e fazendo $\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0} = k$ tem-se

Substituindo esse valor na solução da equação I (x = m/2a), para encontrar as coordenadas de T e T′ e, denotando $K = \dfrac{\sqrt{a^2x_0^2 - ay_0}}{a}$ temos:

$$x = x_0 \pm k \Rightarrow y = a(x_0 \pm k)^2 \text{ e portanto}$$

$$T\left(x_0 + k, a(x_0 + k)^2\right) \text{ e } T'\left(x_0 - k, a(x_0 - k)^2\right)$$

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_0 + k & a(x_0 + k)^2 & 1 \\ x_0 - k & a(x_0 - k)^2 & 1 \end{matrix}\right\|$$

$$S = \left|k\left(ax_0^2 - y_0\right) + ak^3\right|$$

Substituindo o valor de K, temos:

$$S = \frac{\sqrt{ax_0^2 - y_0}\left(ax_0^2 - y_0\right)}{\sqrt{a}} + a \cdot \frac{\sqrt{ax_0^2 - y_0}\left(ax_0^2 - y_0\right)}{\sqrt{a} \cdot a}$$

$$\boxed{S = \frac{2\left(ax_0^2 - y_0\right)^{3/2}}{\sqrt{a}}}$$

B) Sendo S constante, temos:

$$S^2 = \frac{4 \cdot \left(ax_0^2 - y_0\right)^3}{a} \Rightarrow y_0 = ax_0^2 - \sqrt[3]{\frac{aS^2}{4}}$$

C) A equação apresentada no item anterior é a de uma parábola nas variáveis x_0 e y_0, que é igual à parábola original P translada de $\sqrt[3]{\frac{as^2}{2}}$ ascendentemente ao longo do eixo y.

DEMONSTRE que o número $\underbrace{111\ldots1}_{n-1\text{ vezes}}\underbrace{222\ldots2}_{n\text{ vezes}}5$ é um quadrado perfeito.

RESOLUÇÃO:

$$x = \underbrace{111\ldots1}_{n-1}\underbrace{222\ldots2}_{n}5 = \underbrace{111\ldots1}_{2n} + \underbrace{111\ldots1}_{n+1} + 3 \quad (\mathrm{I})$$

$$\underbrace{999\ldots9}_{m} = 10^m - 1 \Rightarrow \underbrace{111\ldots1}_{m} = \frac{10^m - 1}{9} \quad (\mathrm{II})$$

De (I) e (II)

$$x = \frac{10^{2n} - 1}{9} + \frac{10^{n+1} - 1}{9} + 3 = \frac{10^{2n} + 10^{n+1} + 25}{9} = \frac{10^{2n} + 2 \cdot 5 \cdot 10^n + 5^2}{3^2} = \left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2$$

i) 10 deixa resto 1 quando dividido por 3, logo 10^n também deixa resto 1 quando divido por 3.
ii) 5 deixa resto 2 quando dividido por 3.

De (I) e (II) vem:

$10^n + 5$ é divisível por 3, ou seja, $\frac{10^n + 5}{3} \in \mathbb{N}$.

Do exposto vem que $\left(\frac{10^n + 5}{3}\right)^2 = x$ é um quadrado perfeito.

Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de 35 pontos. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. **DETERMINE** quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia 3 pontos, cada empate valia 1 ponto e que derrotas não pontuavam.

RESOLUÇÃO 01:

Sendo V a quantidade de jogos que terminaram com um vencedor, E a quantidade de jogos que terminaram empatados e n o número de times participantes do torneio, temos:

$$\begin{cases} 3V + 2E = 35 \\ V + E = C_{n,2} = \dfrac{n(n-1)}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3V + 2E = 35 \\ 2V + 2E = n(n-1) \end{cases}$$

O que nos dá :

$$V = 35 - n(n-1) \text{ e } E = \frac{3n(n-1) - 70}{2}$$

Lembrando que n, V e E são inteiros não negativos vem:

n = 6, V = 5 e E = 10.

RESOLUÇÃO 02:

Sendo n o número inteiro de times participantes, temos:

$$2 \cdot C_{n,2} \leq 35 \leq 3 \cdot C_{n,2}$$

$$\frac{2 \cdot n(n-1)}{2} \leq 35 \leq \frac{3 \cdot n(n-1)}{2}$$

Inequação que nos dá como única resposta inteira n = 6.

Chamando de V e E as quantidades de jogos que terminaram com um vencedor e empatadas respectivamente, temos:

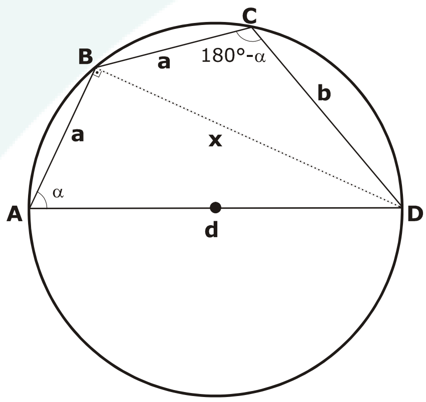
$$\begin{cases} 3V + 2E = 35 \\ V + E = C_{6,2} = 15 \quad \therefore E = 10 \end{cases}$$

Um quadrilátero convexo ABCD está inscrito em um círculo de diâmetro d.
Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = a$, $\overline{AD} = d$ e $\overline{CD} = b$, com a, b e d diferentes de zero.

a) **DEMONSTRE** que $d^2 = bd + 2a^2$.
b) Se a, b e d são números inteiros e a é diferente de b, **MOSTRE** que d não pode ser primo.

RESOLUÇÃO:
a) No triângulo ABD (que é retângulo em B) temos:

$x^2 = d^2 - a^2$ e $\cos\alpha = \dfrac{a}{d}$ (i)



No triângulo BCD:
$x^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.\cos(180° - \alpha)$
$x^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\cos\alpha$ (ii)

De i e ii tem-se
$d^2 - a^2 = a^2 + b^2 + 2.a.b.\dfrac{a}{d}$
$b^2 + \dfrac{2a^2}{d}b + 2a^2 - d^2 = 0$
que é uma equação de 2º grau em b, logo:

$$b = \frac{\dfrac{-2a^2}{d} \pm \sqrt{\left(\dfrac{2a^2}{d}\right)^2 - 4\cdot 1\cdot\left(2a^2 - d^2\right)}}{2} \Rightarrow b = \frac{\dfrac{-2a^2}{d} \pm \sqrt{\dfrac{4a^4 - 8a^2d^2 + 4d^4}{d^2}}}{2} \Rightarrow$$

$$b = \frac{\dfrac{-2a^2}{d} \pm \dfrac{\sqrt{4\left(d^2 - a^2\right)^2}}{d}}{2} \Rightarrow b = \frac{\dfrac{-2a^2}{d} \pm \dfrac{2\left(d^2 - a^2\right)}{d}}{2}$$

Como b > 0 tem-se:

$b = -\dfrac{a^2}{d} + \dfrac{d^2 - a^2}{d} \Leftrightarrow bd = -a^2 + d^2 - a^2$
$\Leftrightarrow d^2 = 2a^2 + bd$

c. q. d.

b) Do item anterior, temos:

$d^2 = db + 2a^2$
$d.(d - b) = 2a^2$

Por absurdo, vamos supor d primo.

i) $d = 2 \Rightarrow b = 1$ e $a = 1$, que é um absurdo pois $a \neq b$.
ii) se d é primo maior do que 2, pelo Teorema Fundamental da Aritmética d é então fator primo de a, e portanto menor que ou igual a a, o que também é um absurdo, pois d é hipotenusa e a cateto no ΔABD.

De i e ii tem-se que d não é primo.