

ITA - 2004

3º DIA

MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto

$$U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Deve-se dizer, então, que é (são) **VERDADEIRA(S)**

A) apenas I e III.

C) apenas II e III.

E) todas as afirmações.

B) apenas II e IV.

D) apenas IV

RESOLUÇÃO:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$

Falsa, pois não se vê o elemento em \emptyset em U .

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$

Verdadeira.

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$

Verdadeira.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$

Falsa, pois a interseção de dois conjuntos resulta em outro conjunto: $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$.

Matemática – Questão 02

Seja o conjunto $S = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \text{ e } r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S$ e $\frac{7}{5} \in S$

II. $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$

III. $\sqrt{2} \in S$

Deve-se dizer, então, que é (são) **VERDADEIRA(S)** apenas

A) I e II

C) II e III

E) II

B) I e III

D) I

RESOLUÇÃO:

I - $\frac{5}{4} \in \mathbb{Q}_+$ e $\frac{7}{5} \in \mathbb{Q}_+$, além de $\left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \leq 2$ e $\left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25} \leq 2$

Logo, é verdadeira.

II - Devemos procurar um número que pertença a ambos os conjuntos como contra exemplo:

$$1 \in \mathbb{Q} : 1 \geq 0 \text{ e } 1^2 \leq 2 \Rightarrow 1 \in S$$

$$1 \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 \leq \sqrt{2} \Rightarrow 1 \in \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\}$$

Logo $1 \in \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S \neq \emptyset$

O que torna a afirmativa falsa.

III - Sabemos que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ou seja, $\sqrt{2}$ é um número irracional, o que a torna falsa.

GABARITO: Letra **D**

Matemática – Questão 03

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que $\alpha^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right)^{2x^2} < 1$.

A) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

C) $]0, 2[$

E) $]2, +\infty[$

B) $]-\infty, 0[\cup [2, +\infty[$

D) $]-\infty, 0[$

RESOLUÇÃO:

$$\alpha^{2x} \cdot \left(\alpha^{-\frac{1}{2}} \right)^{2x^2} = \alpha^{2x} \cdot \alpha^{-x^2} = \alpha^{-x^2+2x} < 1 = \alpha^0$$

Como $0 < \alpha < 1$, temos :

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x &> 0 \\ \therefore S &=]0, 2[\end{aligned}$$

GABARITO: Letra **C**

Matemática – Questão 05

Considere 12 pontos distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 desses pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nesses pontos?

A) 210

C) 410

E) 521

B) 315

D) 415

RESOLUÇÃO:

$$C_{12,3} - C_{5,3} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

GABARITO: Letra **A**

Matemática – Questão 06

Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz $A = \begin{bmatrix} 2^x (x^2 + 1)^{-1} \\ 2^x \log_2 5 \end{bmatrix}$. Assinale a opção **CORRETA**

- A) $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.
- B) Apenas para $x > 0$, A possui inversa.
- C) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.
- D) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.
- E) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

RESOLUÇÃO:

$$A = \begin{bmatrix} 2^x (x^2 + 1)^{-1} \\ 2^x \log_2 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 2^x \log_2 5 - \frac{2^x}{x^2 + 1} = 0$$

$$\Rightarrow \log_2 5 - \frac{1}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = \frac{1}{\log_2 5} \Rightarrow x^2 = \log_5 2 - 1$$

$$\Rightarrow x^2 < 0, \text{ pois } \log_5 2 < 1$$

Logo, não existe x real tal que o $\det A = 0$, daí A admite inversa para todo x real.

GABARITO: Letra **A**

Matemática – Questão 07

Considerando as funções:

$\arcsen : [-1, +1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2]$ e $\arccos : [-1, +1] \rightarrow [0, \pi]$, assinale o valor de

$$\cos\left(\arcsen\frac{3}{5} + \arccos\frac{4}{5}\right)$$

A) $\frac{6}{25}$

C) $\frac{1}{3}$

E) $\frac{5}{12}$

B) $\frac{7}{25}$

D) $\frac{2}{5}$

RESOLUÇÃO:

Fazendo $a = \arcsen\left(\frac{3}{5}\right)$ e $b = \arccos\left(\frac{4}{5}\right)$ temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} a &= \frac{3}{5} & \operatorname{cos} b &= \frac{4}{5} \\ \operatorname{cos} a &= \frac{4}{5} & \operatorname{sen} b &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Sabemos que $\cos(a + b) = \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$, logo:

$$\cos(a + b) = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5} - \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{16 - 9}{25} = \frac{7}{25}$$

GABARITO: Letra **B**

Matemática – Questão 08

Considere um polígono convexo de nove lados, em que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética de razão igual a 5° . Então, seu maior ângulo mede, em graus,

A) 120

C) 140

E) 160

B) 130

D) 150

RESOLUÇÃO:

Progressão aritmética de nove termos:

$(x - 4r, x - 3r, x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r, x + 3r, x + 4r)$

$$\frac{(x - 4r + x + 4r) \cdot 9}{2} = (9 - 2) \cdot 180^\circ$$

$$9x = 7 \cdot 180^\circ$$

$$x = 140^\circ$$

Como $r = 5^\circ$, temos que o maior ângulo interno mede

$$x + 4r = 140^\circ + 4 \cdot 5^\circ = 160^\circ$$

GABARITO: Letra **E**

Matemática – Questão 09

O termo independente de x no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é

A) $729\sqrt[3]{45}$

C) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

E) $165\sqrt[3]{75}$

B) $972\sqrt[3]{15}$

D) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$

RESOLUÇÃO:

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12} = \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{x^2}} - \sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}\right)^{12} \Rightarrow$$

O termo geral do desenvolvimento é :

$$\binom{12}{p} \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \cdot \sqrt[6]{\frac{1}{x^2}}\right)^{12-p} \left(-\sqrt[3]{\frac{5}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}\right)^p, \text{ com } p = 0, 1, \dots, 12.$$

Para termos o termo independente faremos:

$$2(12 - p) = p \Rightarrow p = 8$$

Logo:

$$\binom{12}{8} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^4 \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^8 = 165\sqrt[3]{75} \text{ é o termo independente.}$$

GABARITO: Letra **E**

Matemática – Questão 10

Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n \times n$, $n \geq 2$:

- I. O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
- II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.
- III. Se B for obtida de A , multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2} + 1$ e a segunda por $\sqrt{2} - 1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) **VERDADEIRA(S)**.

A) apenas II.

C) apenas I e II.

E) todas.

B) apenas III.

D) apenas II e III.

RESOLUÇÃO:

- I. Falsa, pois como contraexemplo poderíamos citar a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, cujo determinante é nulo.

Notemos que A é uma matriz triangular, logo $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot \dots \cdot a_{nn}$. II é verdadeira.

- III. Ao multiplicarmos uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada por um número K , o seu determinante também fica multiplicado por K . Logo:

$$\det B = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) \cdot \det A = \det A.$$

III é verdadeira.

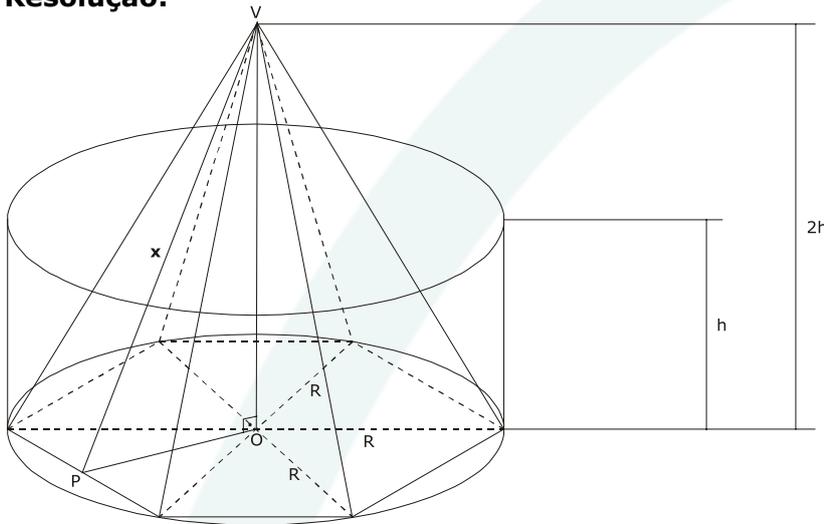
GABARITO: Letra **D**

Matemática – Questão 11

Considere um cilindro circular reto, de volume igual a $360\pi \text{ cm}^3$, e uma pirâmide regular cuja base hexagonal está inscrita na base do cilindro. Sabendo que a altura da pirâmide é o dobro da altura do cilindro e que a área da base da pirâmide é de $54\sqrt{3} \text{ cm}^2$, então, a área lateral da pirâmide mede, em cm^2 ,

- A) $18\sqrt{427}$ C) $36\sqrt{427}$ E) $45\sqrt{427}$
B) $27\sqrt{427}$ D) $108\sqrt{3}$

Resolução:



$$A_{b(\text{pirâmide})} = 6 \cdot \frac{R^2\sqrt{3}}{4} = 54\sqrt{3}$$

$$\therefore R = 6 \text{ cm}$$

$$V_{\text{cilindro}} = \pi R^2 \cdot h = 360\pi$$

$$\therefore h = 10 \text{ cm}$$

No triângulo VOP, temos:

$$x^2 = (2h)^2 + \left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2 = (2 \cdot 10)^2 + \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 400 + 27$$

$$\therefore x = \sqrt{427} \text{ cm}$$

Logo, a área lateral da pirâmide é dada por:

$$A_l = 6 \cdot \frac{R \cdot x}{2} = 3 \cdot 6 \cdot \sqrt{427} \text{ cm}^2$$

$$A_l = 18\sqrt{427} \text{ cm}^2$$

GABARITO: Letra **A**

Matemática – Questão 12

O conjunto de todos os valores de α , $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, tais que as soluções da equação (em x) $x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0$ são todas reais, é:

A) $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$

C) $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$

E) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{3}\right]$

B) $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

D) $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

RESOLUÇÃO:

$$\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad x^4 - \sqrt[4]{48}x^2 + \operatorname{tg}\alpha = 0 \text{ (equação biquadrada)}$$

Usamos a seguinte substituição:

$$y = x^2 \Rightarrow y^2 - \sqrt[4]{48}y + \operatorname{tg}\alpha = 0$$

Obs. :

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} &\Rightarrow y \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta \geq 0 \\ \sqrt{48} - 4 \cdot 1 \cdot \operatorname{tg}\alpha &\geq 0 \\ 4\sqrt{3} &\geq 4\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha &\leq \sqrt{3} \quad (\text{I}) \end{aligned}$$

A condição (I) garante $y \in \mathbb{R}$.

$x = \pm\sqrt{y}$, logo $y \geq 0$ garante $x \in \mathbb{R}$.

$$y = \frac{-(-\sqrt[4]{48}) \pm \sqrt{\sqrt{48} - 4\operatorname{tg}\alpha}}{2} \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sqrt[4]{48} - \sqrt{\sqrt{48} - 4\operatorname{tg}\alpha} &\geq 0 \\ \sqrt{48} &\geq \sqrt{48} - 4\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{tg}\alpha &\geq 0 \quad (\text{II}) \end{aligned}$$

De (I) e (II), temos:

$$0 \leq \operatorname{tg}\alpha \leq \sqrt{3} \quad \therefore \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$$

GABARITO: Letra **D**

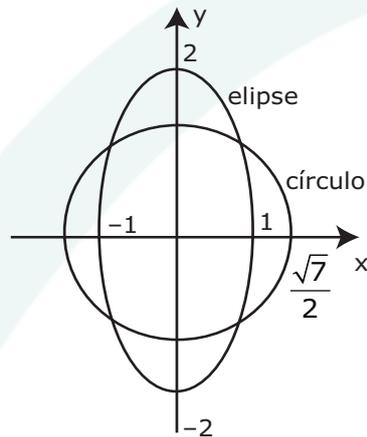
Matemática – Questão 14

Considere todos os números $z = x + iy$ que têm módulo $\sqrt{7}/2$ e estão na elipse $x^2 + 4y^2 = 4$. Então, o produto deles é igual a:

- A) $\frac{25}{9}$ C) $\frac{81}{25}$ E) 4
B) $\frac{49}{16}$ D) $\frac{25}{7}$

RESOLUÇÃO:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ x^2 + 4y^2 &= 4 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{7}{4} \end{cases} \\ |z| = \frac{\sqrt{7}}{2} \Rightarrow \end{aligned}$$



Fazendo

$$\begin{aligned} x^2 + 4y^2 &= 4 \\ x^2 + y^2 &= \frac{7}{4} \\ \frac{3y^2}{4} &= 4 - \frac{7}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Substituindo y , temos: $x^2 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$
 $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$$z_1 = 1 + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = 1 - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_3 = -1 + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_4 = -1 - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Observamos que:

$$z_1 = \overline{z_2} \quad z_1 \cdot z_2 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

\Rightarrow

$$z_3 = \overline{z_4} \quad z_3 \cdot z_4 = \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot z_4 = \frac{49}{16}$$

GABARITO: Letra **B**

Matemática – Questão 15

Para algum número real r , o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números a seguir está mais próximo de r ?

A) 1,62

C) 1,42

E) 1,22

B) 1,52

D) 1,32

RESOLUÇÃO:

Encontremos as raízes do polinômio $P(x) = 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$.

Por pesquisa de raízes racionais temos que $\frac{3}{2}$ é raiz de $P(x)$.

Reduzindo o grau vem:

$$\begin{array}{r|rrrr} 3/2 & 8 & -4 & -42 & 45 \\ \hline & 8 & 8 & -30 & 0 \end{array} \quad \text{Resto}$$

$$8x^2 + 8x - 30 = 0$$

$$4x^2 + 4x - 15 = 0$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{256}}{8}$$

$$x = \frac{-4 \pm 16}{8}$$

$$x = \frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-5}{2}$$

Concluimos que $3/2$ é raiz dupla de $P(x)$, ou seja,

$P(x)$ é divisível por $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$

Portanto $r = 1,5$

GABARITO: Letra **B**

Matemática – Questão 16

Assinale a opção que representa o lugar geométrico dos pontos (x, y) do plano que satisfazem a equação.

$$\det \begin{bmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} = 288$$

A) Uma elipse

C) Uma circunferência

E) Uma reta

B) Uma parábola

D) Uma hipérbole

RESOLUÇÃO:

Trocando de posição a primeira coluna com a quarta coluna e, em seguida, a primeira linha com a terceira linha temos:

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 40 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 34 & 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 6 & 40 \\ 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & 5 & 3 & 34 \end{vmatrix} = 288$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & 36 \\ x - 2 & y & x^2 + y^2 - 4 \\ 3 & 3 & 30 \end{vmatrix} = 288$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 6 \\ x - 2 & y & x^2 + y^2 - 4 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 16$$

$$x^2 + y^2 - 4 + 6x - 12 - 6y - 10x + 20 = 16$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 - 6y + 9 - 9 = 12$$

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

∴ Uma circunferência de centro $(2, 3)$ e raio $R = 5$

GABARITO: Letra **C**

Matemática – Questão 17

A soma das raízes da equação $z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0$, $z \in \mathbb{C}$ é igual a

- A) -2 C) 0 E) 2
B) -1 D) 1

RESOLUÇÃO:

$$z^3 + z^2 - |z|^2 + 2z = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Usando a propriedade $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$, temos:

$$\begin{aligned} z^3 + z^2 - z \cdot \bar{z} + 2z &= 0 \\ z(z^2 + z - \bar{z} + 2) &= 0 \\ z = 0 \quad \text{ou} \quad z^2 + z - \bar{z} + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Tomemos $z = x + iy$, com x e y reais:

$$x^2 - y^2 + 2xyi + 2yi + 2 = 0$$

$$\begin{cases} 2(x+1)y = 0 \\ x^2 - y^2 + 2 = 0 \end{cases}$$

$$y = 0 \Rightarrow x^2 = -2 \quad \therefore x \notin \mathbb{R}$$

ou

$$x = -1 \Rightarrow y^2 = 3 \quad \therefore y = \pm\sqrt{3}$$

$$\text{O que nos dá } z = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad z = -1 - i\sqrt{3}$$

Portanto a soma dos possíveis valores de z é $0 + (-1 + i\sqrt{3}) + (-1 - i\sqrt{3}) = -2$

GABARITO: Letra **A**

Matemática – Questão 18

Dada a equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$, em que m é uma constante real, considere as seguintes afirmações:

- I. Se $m \in]-6, 6[$, então existe apenas uma raiz real.
- II. Se $m = -6$ ou $m = +6$, então existe raiz com multiplicidade 2.
- III. $\forall m \in \mathbb{R}$, todas as raízes são reais.

Então,
podemos afirmar que é (são) **VERDADEIRA(S)** apenas:

- A) I
- B) II
- C) III
- D) II e III
- E) I e II

RESOLUÇÃO:

Notemos que -1 é raiz da equação $x^3 + (m + 1)x^2 + (m + 9)x + 9 = 0$

Reduzindo o grau:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & m+1 & m+9 & 9 \\ \hline & 1 & m & 9 & 0 \end{array}$$

$$x^2 + mx + 9 = 0$$

$$x = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 36}}{2}$$

- I. Se $m \in]-6, 6[$, então $m^2 - 36 < 0$ e daí -1 é a única raiz real. Portanto, I é verdadeira.
- II. Se $m = +6$ ou $m = -6$, então $m^2 - 36 = 0$ e daí a raiz $-\frac{m}{2}$ será de multiplicidade 2. Logo II é verdadeira.
- III. Afirmativa falsa, pois I é verdadeira.

GABARITO: Letra **E**

Matemática – Questão 19

Duas circunferências concêntricas C_1 e C_2 têm raios de 6 cm e $6\sqrt{2}$ cm, respectivamente. Seja \overline{AB} uma corda de C_2 , tangente à C_1 . A área de menor região delimitada pela corda \overline{AB} e pelo arco \widehat{AB} mede, em cm^2 ,

A) $9(\pi - 3)$

C) $18(\pi - 2)$

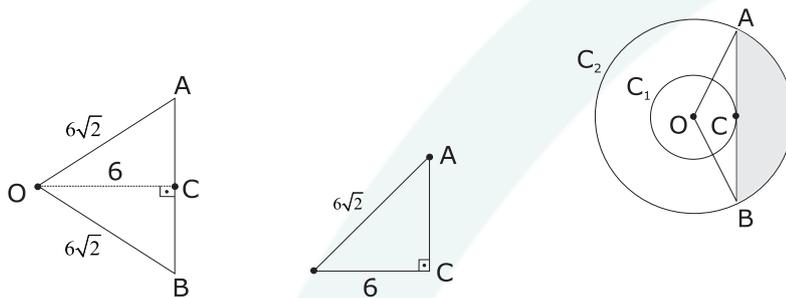
E) $16(\pi + 3)$

B) $18(\pi + 3)$

D) $18(\pi + 2)$

RESOLUÇÃO:

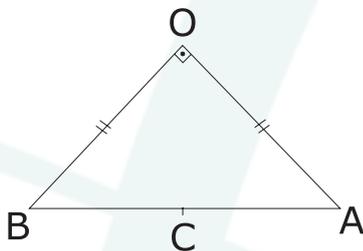
Seja O o centro das circunferências e C o ponto de tangências de \overline{AB} com C_1



Por Pitágoras $\Rightarrow AC = 6$

Por simetria $\Rightarrow AB = AC + BC = 6 + 6 = 12$ cm, $\widehat{AOC} = 45^\circ$ e $\widehat{BOC} = 45^\circ$

Logo, $\widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow$ triângulo retângulo isósceles



Portanto, podemos **CALCULAR** a área do segmento circular a partir das áreas do setor circular e do triângulo:

$$\begin{aligned} A_{\text{segmento}} &= A_{\text{setor}} - A_{\text{triângulo}} \\ &= \frac{90^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 72 - 36 = 36 \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$A_{\text{segmento}} = 18(\pi - 2) \text{ cm}^2$$

GABARITO: Letra **C**

Matemática – Questão 20

A área total da superfície de um cone circular reto, cujo raio da base mede R cm, é igual à terça parte da área de um círculo de diâmetro igual ao perímetro da seção meridiana do cone. O volume deste cone, em cm^3 , é igual a

A) πR^3

C) $\frac{\pi}{\sqrt{2}} R^3$

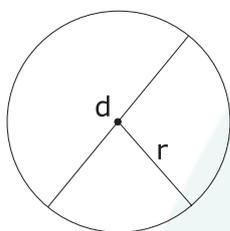
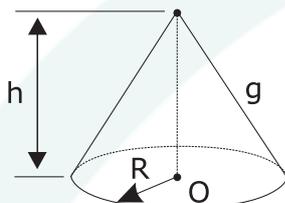
E) $\frac{\pi}{\sqrt{3}} R^3$

B) $\pi\sqrt{2}R^3$

D) $\pi\sqrt{3} R^3$

RESOLUÇÃO:

$$A_{\text{superfície}} = \pi \cdot R \cdot (R + g)$$



$$\begin{aligned}d &= 2R + 2g \\ r &= R + g\end{aligned}$$

$$A_{\text{círculo}} = \pi (R + g)^2$$

Dado: $A_{\text{superfície}} = \frac{1}{3} A_{\text{círculo}}$

$$\pi \cdot R \cdot (R + g) = \frac{1}{3} \pi \cdot (R + g)^2$$

$$3R = R + g \Rightarrow g = 2R$$

Usando Pitágoras:

$$g^2 = h^2 + R^2$$

$$h = \sqrt{4R^2 - R^2} \Rightarrow h = R\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi \cdot R^2 \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{3} \pi \cdot R^3$$

$$V = \frac{\pi \cdot R^3}{\sqrt{3}}$$

GABARITO: Letra **E**

Matemática – Questão 21

Seja A um conjunto não vazio.

A) Se $n(A) = m$, **CALCULE** $n(\mathcal{P}(A))$ em termos de m .

B) Denotando $\mathcal{P}^1(A) = \mathcal{P}^k(A) = \mathcal{P}(\mathcal{P}^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, **DETERMINE** o menor k , tal que $n(\mathcal{P}^k(A)) \geq 65\,000$, sabendo que $n(A) = 2$.

RESOLUÇÃO:

A) $n(\mathcal{P}(A)) = \binom{m}{0} + \binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \dots + \binom{m}{m}$, em que $\binom{m}{p}$ é a quantidade de subconjuntos de A com exatamente p elementos.

$$\therefore n(\mathcal{P}(A)) = \sum_{p=0}^m \binom{m}{p} \cdot 1^{m-p} \cdot 1^p = (1+1)^m = 2^m.$$

B) $n(A) = 2 \Rightarrow n(\mathcal{P}(A)) = 2^2 = 4 \Rightarrow$
 $n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) = 2^4 = 16 \Rightarrow n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)))) = 2^{16} = 65\,536 > 65\,000.$

Da notação dada, temos $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) = \mathcal{P}^3(A)$ e portanto o menor valor de k é 3.

Matemática – Questão 22

Uma caixa branca contém 5 bolas verdes e 3 azuis, e uma caixa preta contém 3 bolas verdes e 2 azuis. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que 4, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais casos, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

RESOLUÇÃO:

Caixa Branca: 5 bolas verdes e 3 bolas azuis.

Caixa Preta: 3 bolas verdes e 2 bolas azuis.

Resultado possíveis nos dados:

$(1, 1), (1, 2), (1, 3) \dots (6, 6)$ em um total de 36 resultados possíveis.

Resultados cuja a soma é menor que 4:

$(1, 1), (1, 2)$ e $(2, 1)$, em um total de 3 resultados.

A probabilidade P pedida é dada por:

$$P = \frac{3}{36} \cdot \frac{5}{8} + \frac{33}{36} \cdot \frac{3}{5} \Rightarrow P = \frac{289}{480}$$

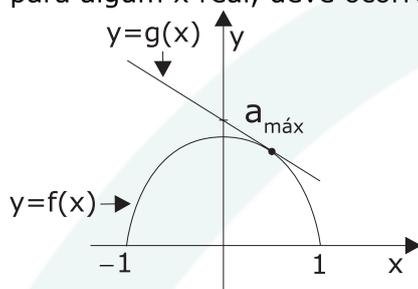
Matemática – Questão 23

DETERMINE os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a-x$.

RESOLUÇÃO:

Seja $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $g(x) = -x + a$ definidas para valores de x no intervalo $[-1, 1]$

Para termos $f(x) > g(x)$ para algum x real, deve ocorrer $a \leq a_{\text{máx}}$



Cálculo do máximo valor de a :

$$\sqrt{1-x^2} = -x + a$$

$$1 - x^2 = x^2 - 2ax + a^2$$

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = (-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 1) = 0$$

$$4a^2 - 8a^2 + 8 = 0$$

$$a^2 = 2 \therefore a = \pm\sqrt{2}$$

$$a_{\text{máx}} = \sqrt{2}$$

Logo, basta $a \leq \sqrt{2}$

Matemática – Questão 24

Sendo $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, **CALCULE** $\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}|$.

RESOLUÇÃO:

$$z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\left| \sum_{n=1}^{60} z^n \right| = |z + z^2 + z^3 + \dots + z^{60}|$$

Repare que $\sum_{n=1}^{60} z^n$ é a soma de uma P.G. de 60 termos.

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad a_n = a_1 q^{n-1}$$

$$q = z, a_1 = z$$

$$z = \text{cis } 45^\circ = \cos 45^\circ + i \cdot \text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z^{61} = \text{cis } (61 \cdot 45^\circ) = \text{cis } 225^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{60} = z \frac{1 - z^{60}}{1 - z} = \frac{z - z^{61}}{1 - z}$$

$$S_{60} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i \right)}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$S_{60} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$|S_{60}| = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}$$

$$|S_{60}| = \frac{2\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{\sqrt{4 - 2}} = \sqrt{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}} = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$$

Matemática – Questão 25

Para $b > 1$ e $x > 0$, **RESOLVA** a equação em x : $(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$.

RESOLUÇÃO:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0 \quad b > 1, x > 0$$

$$2^{\log_b 2} x^{\log_b 2} = 3^{\log_b 3} x^{\log_b 3}$$

$$x^{(\log_b 2 - \log_b 3)} = 3^{\log_b 3} \cdot 2^{-\log_b 2}$$

$$x^{\log_b \frac{2}{3}} = 3^{\log_b 3} \cdot 2^{-\log_b 2}$$

$$x = 3^{\left(\frac{\log_b 3}{\log_b \frac{2}{3}}\right)} \cdot 2^{\left(\frac{-\log_b 2}{\log_b \frac{2}{3}}\right)}$$

$$x = 3^{\log_{\frac{2}{3}} 3} \cdot 2^{-\log_{\frac{2}{3}} 2} \Rightarrow$$

$$x = 3^{\log_{2/3} 3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-\log_{2/3} 2}$$

$$x = 3^{\log_{2/3} 3} \cdot 3^{-\log_{2/3} 2}$$

$$x = 3^{\log_{2/3} 3/2} \cdot 1/2$$

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$$

Matemática – Questão 26

Considere a equação $x^3 + 3x^2 - 2x + d = 0$, em que d é uma constante real. Para qual valor de d a equação admite uma raiz dupla no intervalo $]0,1[$?

RESOLUÇÃO:

Seja $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x + d$
A raiz dupla é também raiz da derivada de $P(x)$.

$$P'(x) = 3x^2 + 6x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{60}}{6} = -1 \pm \frac{1}{3}\sqrt{15}$$

Como $x \in]0,1[$ vem:

$$x = \frac{-3 + 1\sqrt{15}}{3}$$

Voltando em $P(x)$:

$$P\left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}\right) = \left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}\right)^3 + 3\left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{-3 + \sqrt{15}}{3}\right) + d = 0$$

$$\therefore d = \frac{10\sqrt{15}}{9} - 4$$

Matemática – Questão 27

PROVE que, se os ângulos internos α , β e γ de um triângulo satisfazem a equação

$$\operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(3\beta) + \operatorname{sen}(3\gamma) = 0$$

então, pelo menos, um dos três ângulos α , β ou γ é igual a 60° .

RESOLUÇÃO:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Fatorando:

$$\operatorname{sen}(3\alpha) + \operatorname{sen}(3\beta) + \operatorname{sen}(3\gamma) = 0$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}\{3[180^\circ - (\alpha + \beta)]\} = 0$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \operatorname{sen}(3\alpha + 3\beta) = 0$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) = 0$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{3\alpha - 3\beta}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \right] = 0$$

$$2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) \cdot 2 \cdot \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) = 0$$

$$\text{ou } \operatorname{sen}\left(\frac{3\alpha + 3\beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\alpha + 3\beta}{2} = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 120^\circ \Rightarrow \gamma = 60^\circ$$

$$\text{ou } \cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\alpha}{2} = 90^\circ \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\text{ou } \cos\left(\frac{3\beta}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3\beta}{2} = 90^\circ \Rightarrow \beta = 60^\circ$$

Logo, um dos ângulos internos do triângulo mede 60° .

Matemática – Questão 28

Se A é uma matriz real, considere as definições:

- I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.
- II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

DETERMINE as matrizes de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

RESOLUÇÃO:

Seja M uma matriz diagonal 3×3 :

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow M^t = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Como M é ortogonal, tem-se

$$M \cdot M^t = I$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore a = \pm 1, b = \pm 1 \text{ e } c = \pm 1$$

Daí, as 8 possíveis soluções são do tipo:

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ com } \therefore a = \pm 1, b = \pm 1 \text{ e } c = \pm 1.$$

Matemática – Questão 30

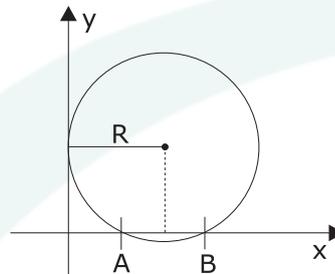
Sejam os pontos A: (2, 0), B: (4, 0) e P: (3, $5 + 2\sqrt{2}$). **DETERMINE** a equação da circunferência C, cujo centro está situado no primeiro quadrante, passa pelos pontos A e B e é tangente ao eixo y. **DETERMINE** as equações das retas tangentes à circunferência C que passam pelo ponto P.

RESOLUÇÃO:

Determinação da circunferência C:

Dado $x_C > 0$ e $y_C > 0$

$\left. \begin{array}{l} A \in C \\ B \in C \end{array} \right\} \Rightarrow$ O centro de C está na mediatriz
de $\overline{AB} \Rightarrow x_C = 3$

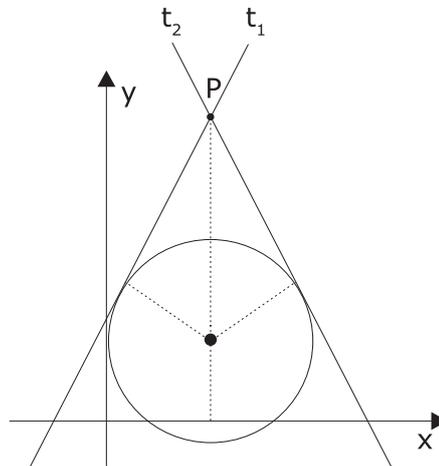


Usando a tangência, temos que $R = 3$

$$\begin{aligned} \text{Calculemos } y_C \Rightarrow (x_A - 3)^2 + (y_A - y_C)^2 &= 9 \\ 1 + y_C^2 &= 9 \\ y_C = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow y_C &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{Equação de C: } (x - 3)^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = 9$$

$$\begin{aligned} \text{As retas que passam por P são da forma:} \\ y - (5 + 2\sqrt{2}) &= m(x - 3) \\ mx - y - 3m + 5 + 2\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$



$d_C = R =$ distância entre o centro da circunferência e as retas t

$$\frac{|3m - 2\sqrt{2} - 3m + 5 + 2\sqrt{2}|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = 3$$

$$5 = 3\sqrt{m^2 + 1}$$

$$\frac{25}{9} = m^2 + 1$$

$$m^2 = \frac{16}{9} \Rightarrow m = \pm \frac{4}{3}$$

As retas serão:

$$t_1 : \frac{4}{3}x - y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$$

$$t_2 : -\frac{4}{3}x - y + 9 + 2\sqrt{2} = 0$$