MATEMÁTICA

Matemática — Questão 01

Dada a função $f(x) = \dfrac{(156^{x} + 156^{-x})}{2}$, **DEMONSTRE** que f(x +y)+f(x −y)=2f(x)f(y).

RESOLUÇÃO

$$f(x+y) + f(x-y) = \frac{156^{x+y} + 156^{-x-y}}{2} + \frac{156^{x-y} + 156^{-x+y}}{2} =$$

$$= \frac{156^{x}\left(156^{y} - 156^{-y}\right) + 156^{-x}\left(156^{y} + 156^{-y}\right)}{2}$$

$$= 2 \cdot \frac{156^{x} + 156^{-x}}{2} \cdot \frac{156^{y} + 156^{-y}}{2}$$

$$= 2f(x)f(y)$$

Matemática — Questão 02

O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que

. a senha utilizada possui quatro dígitos;

. o primeiro e o último dígito encontram-se numa mesma linha;

. o segundo e o terceiro dígito encontram-se na linha imediatamente superior.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

CALCULE o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que, com certeza, ele consiga entrar na casa.

RESOLUÇÃO

Decorre do exposto que o primeiro e último dígitos não podem estar na primeira linha. Assim nos restam três possibilidades para a localização desses dois dígitos:

2ª Linha: $\frac{3}{1^o} \cdot \frac{3}{2^o} \cdot \frac{3}{3^o} \cdot \frac{3}{4^o} = 81$

3ª Linha: 81 (análogo a 2ª linha)

4ª Linha: $\frac{1}{1^o} \cdot \frac{3}{2^o} \cdot \frac{3}{3^o} \cdot \frac{1}{4^o} = 9$

O que nos dá o número total de senhas distintas como resultado de

$81+81+9 = 171$

Sejam a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1. Sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e logcd são termos consecutivos de uma progressão aritmética, **DEMONSTRE** que

$c^2=(ac)^{\log_a d}$

RESOLUÇÃO

Como $\log_a d$,$\log_b d$ e lo gd estão em P.A.:

$$2\log_b d = \log_a d + \log_c d$$

$$\frac{2\log_a d}{\log_a b} = \frac{\log_a d}{\log_a a} + \frac{\log_a d}{\log_a c} \quad (\log_a d \neq o)$$

$$\frac{2}{\log_a b} = 1 + \log_c a$$

$$\frac{2}{\log_a b} = \log_c c + \log_c a$$

$$\frac{2}{\log_a b} = \log_c ac$$

$$\frac{2}{\log_a b} = \frac{1}{\log_{ac} c}$$

$$\log_{ac} c^2 = \log_a b$$

$$\boxed{c^2 = (ac)^{\log_a b}}$$

No entanto, foi pedido para demonstrar que $c^2=(ac)^{\log_a d}$.

Acreditamos que a igualdade a ser demonstrada era originalmente a que demonstramos, mas que foi alterada por erro no processo de edição da prova.

É possível que esta questão venha a ser anulada.

Matemática — Questão 04

Determine o valor das raízes comuns das equações $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18 = 0$ e $x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52 = 0$

RESOLUÇÃO:

Como os coeficientes do polinômio $P(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 18x + 18$ são inteiros, suas possíveis raízes racionais são:
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9$ e ± 18.

Por inspeção identificamos ± 3 como raízes.

E dividindo P(x) por (x+3) e (x-3) temos:

-3	-1	-2	-11	18	18
3	1	-5	4	6	0
	1	-2	-2	0	

Logo, $P(x) = (x+3)(x-3)(x^2 - 2x - 2)$ e fazendo $x_2 - 2x - 2 = 0$ encontramos suas outras raízes: $1 \pm \sqrt{3}$

Por verificação vemos que ± 3 não são raízes de $Q(x) = x^4 - 12x^3 - 44x^2 - 32x - 52$ e como os coeficientes de Q(x) são racionais temos que se um dos valores $1 \pm \sqrt{3}$ for raiz de Q(x), o outro também será e Q(x) será múltiplo de $x^2 - 2x - 2$.

Verificando:

$$
\begin{array}{llllll|l}
x^4 & -12x^3 & -42x^2 & -32x & -52 & & x^2 - 2x - 2 \\
\cline{7-7}
\underline{-x^4} & \underline{+2x^3} & \underline{+2x^2} & & & & x^2 - 10x - 62 \\
 & -10x^3 & -42x^2 & -32x & -52 & & \\
 & \underline{+10x^3} & \underline{-20x^2} & \underline{-20x} & & & \\
 & & -62x^2 & -52x & -52 & & \\
 & & \underline{+62x^2} & \underline{-124x} & \underline{-124} & & \\
 & & & -176x & -176 & &
\end{array}
$$

Como o resto não é nulo concluímos que $1 \pm \sqrt{3}$ não são raízes de Q(x). Portanto, os polinômios não possuem raízes comuns.

Matemática — Questão 05

Resolva a equação $2\text{sen}11x + \cos 3x + \sqrt{3}\,\text{sen}3x = 0$

RESOLUÇÃO:

$$2\text{sen }11x + \cos\ 3x + \sqrt{3}\,\text{sen }\ 3x = 0$$

$$2\text{sen }11x + 2\left(\frac{1}{2}\cos 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{sen }3x\right) = 0$$

$$\text{sen }11x + \text{sen}\frac{\pi}{6}\cdot\cos 3x + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\text{sen }3x = 0$$

$$\text{sen }11x + \text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\text{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen}(-11x)$$

$$3x + \frac{\pi}{6} = -11x + 2k\pi \qquad \text{ou} \qquad 3x + \frac{\pi}{6} = \pi + 11x + 2k\pi$$

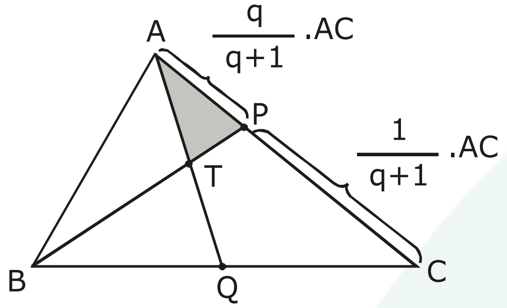
$$\boxed{x = \frac{-\pi}{84} + \frac{k\pi}{7}} \qquad \boxed{x = \frac{-5\pi}{48} + \frac{k\pi}{4}}$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x = \frac{-\pi}{84} + \frac{k\pi}{7} \text{ ou } x = \frac{-5\pi}{48} - \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Considere um triangulo ABC de área S. Marca-se o ponto p sobre o lado AC tal que PA/PC=q e o ponto q sobre o lado BC de maneira que QB/QC=r. As cevianas AQ e BP encontram-se em T, conforme ilustrado na figura. **DETERMINE** a área do triangulo.

RESOLUÇÃO:

1ª SOLUÇÃO:



$$\frac{PA}{PC} = q \qquad \frac{QB}{QC} = r$$

Aplicando o teorema de Menelaus ao ΔBPC, segundo a reta AQ, temos:

$$\frac{QB}{QC} \cdot \frac{AC}{AP} \cdot \frac{TP}{TB} = 1$$

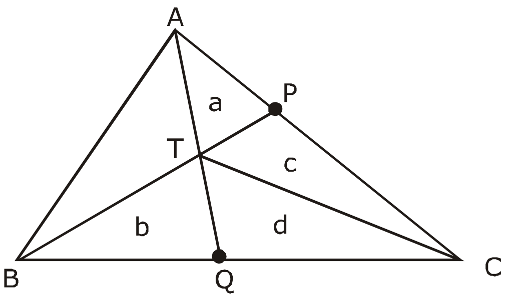
$$r \cdot \frac{q+1}{q} \cdot \frac{TP}{TB} = 1 \Rightarrow \frac{TP}{TB} = \frac{q}{(q+1)r} \Rightarrow \underbrace{\frac{TP}{BP} = \frac{q}{(q+1)r+q}}_{\substack{\text{é a razão entre as} \\ \text{alturas também,} \\ \text{pelo Teorema de Tales}}}$$

Como a base AC do Δ ficou multiplicada por $\frac{q}{q+1}$ e a altura relativa à base AC foi multiplicada por $\frac{q}{(q+1)r+q}$ a área do ΔATP será:

$$S' = S \cdot \frac{q}{q+1} \cdot \frac{q}{(q+1)r+q} = \frac{q^2 \cdot S}{(q+1)\left[(q+1)r+q\right]}$$

$$S' = \frac{q^2 \cdot S}{(q+1)^2 r + q(q+1)} \Rightarrow \boxed{S' = S\frac{q^2}{(q+1)(qr+q+r)}}$$

2ª SOLUÇÃO:



Seja <u>a</u> a área do triângulo ATP, <u>b</u> a área do triângulo BTQ, <u>c</u> a área do triângulo PTC e d a área do triângulo TQC.

Como os triângulos ATP e PTC possuem alturas idênticas em relação aos lados contidos em $\overleftrightarrow{AC}$, temos:

$$\frac{a}{c}=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} \Rightarrow \boxed{c=\frac{a}{q}}$$

Por raciocínio análogo provamos que $\boxed{d=\frac{b}{r}}$

$$\overleftrightarrow{AC}:\frac{S}{A_{PBC}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PC}} \Rightarrow \frac{s}{b+c+d}=\frac{\overline{AP}+\overline{PC}}{\overline{PC}}$$

$$\frac{S}{b+\frac{a}{q}+\frac{a}{q}}=q+1 \Rightarrow \frac{a}{q}+b\left(1+\frac{1}{r}\right)=\frac{s}{q+1} \quad (i)$$

Como os triângulos ABC e AQC têm alturas idênticas com relação aos lados contidos em $\overleftrightarrow{BC}$:

$$\frac{S}{A_{AQC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{QC}} \Rightarrow \frac{S}{a+c+d}=\frac{\overline{BQ}+\overline{QC}}{\overline{QC}} \Rightarrow \frac{s}{a+\frac{a}{q}+\frac{b}{r}}=r+1 \Rightarrow a\left(1+\frac{1}{q}\right)+\frac{b}{r}=\frac{S}{r+1} \ (ii)$$

Multiplicando (i) por $\left(1+\frac{1}{q}\right)^{-1}$ e (ii) -r e somando-as temos:

$$\frac{a}{q}\cdot\frac{\cancel{r}}{r+1}-a\frac{q+1}{q}\cdot\cancel{r}=\frac{S}{q+1}\cdot\frac{\cancel{r}}{r+1}-\frac{S\cancel{r}}{r+1}$$

$$a\cdot(q+1)-a(q+1)(q+1)(r+1)=Sq-Sq(q+1)$$
$$a\cdot(q+1)(-qr-q-r)=S\left(-q^2\right)$$

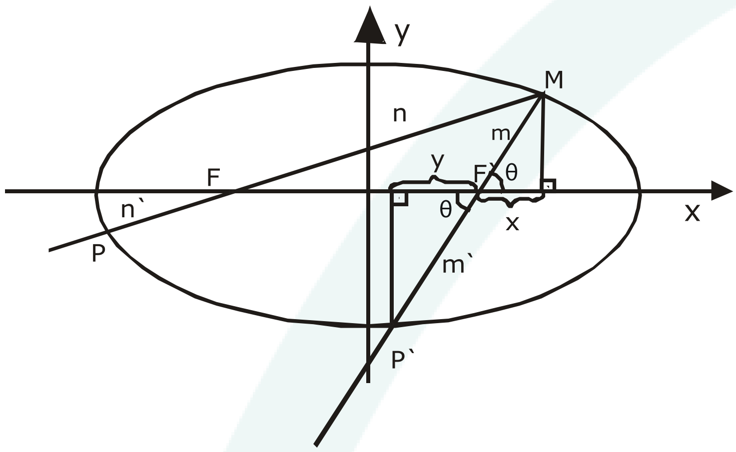
$$\boxed{a=S\frac{q^2}{(q+1)(qr+q+r)}}$$

Considere uma elipse de focos F e F’, e M um ponto qualquer dessa curva. Traça-se por m duas secantes MF e MF’ , que interceptam a elipse em P e P’, respectivamente. **DEMONSTRE** que a soma (MF/FP)+(MF’/F’P’) é constante.

Sugestão: calcule inicialmente a soma (1/MF)+(1/FP).

RESOLUÇÃO:

Considere a figura:



Onde: MF=n, FP=n’, MF’=m e F’P’=m’.
São conhecidas as seguintes relações:

$$m = a - e(c + x)$$
$$m' = a - e(c + y)$$

em que, x=mcosθ e y=m’cosθ .

Substituindo em cada equação e isolando m e m’, temos:

$$m = \frac{a - eC}{1 + \cos\theta} \text{ e } m' = \frac{a - efC}{1 - \cos\theta}$$

Daí,

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = \frac{2}{a - ec}.$$

Analogamente,

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = \frac{2}{a - ec}.$$

em que temos:

$$m\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m}\right) + n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n'}\right) = \frac{2m}{a - ec} + \frac{2n}{a - ec} \Rightarrow 1 + \frac{m}{m'} + 1 + \frac{n}{n'} = \frac{2(m + n)}{a - ec}$$

$$2 + \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} = \frac{4a}{a - \frac{c^2}{a}} \Rightarrow \frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} = \frac{4a}{\frac{a^2 - c^2}{a}} - 2 \Rightarrow \boxed{\frac{m}{m'} + \frac{n}{n'} = \frac{2a^2 + 2c^2}{b^2}(\text{cons tan te})}$$

Matemática — Questão 08

Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x)=x^3+rx-t$, em que r e t são números reais e não nulos.

A) **DETERMINE** o valor da expressão $a^3+b^3+c^3$ em função de r e t.
B) **DEMONSTRE** que $S^{n+1}+ rS^{n-1}- tS^{n-2}=0$ para todo número natural $n\geq 2$,

em que $S^k=a^k+b^k+c^k$ para qualquer número natural k.

RESOLUÇÃO:

a) $p(x)=x^3+rx-t$
(i) a, b e c são raízes, logo satisfazem a equação $p(x)=0$
(ii) pelas relações de Girard temos $a + b + c = 0$

$a^3 + ra - t = 0$
$b^3 + rb\ t = 0$ (+)
$c^3 + rc - t = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 + r(a + b + c) - 3t = 0$

$a^3 + b^3 + c^3 + r(0) - 3t = 0$
$a^3 + b^3 + c^3 = 3t$

b) $a^3 + ra - t = 0 \times (a^{n-2})$
$b^3 + rb - t = 0 \times (b^{n-2})$
$c^3 + rc - t = 0 \times (c^{n-2})$

$a^{n+1} + ra^{n-1} - ta^{n-2} = 0$
$b^{n+1} + rb^{n-1} - tb^{n-2} = 0$ (+)
$c^{n+1} + rc^{n-1} - tc^{n-2} = 0$

$S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2}= 0$ $n \geq 2$

CALCULE o determinante da matriz n x n em função de b, em que b é um número real tal que $b^2 \neq 1$,

$$\underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{\text{n colunas}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{n linhas}$$

RESOLUÇÃO:

Provemos por indução finita que o determinante vale

$$D_n = 1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{2n},\ n \geq 1$$

(i) n = 1: $D_1 = \left| b^2 + 1 \right| = b^2+1$

n = 2: $D_2 = \begin{vmatrix} b^2+1 & b \\ b & b^2+1 \end{vmatrix} = (b^2+1)^2 - b^2 = 1 + b^2 + b^4$

(ii) hipótese: $D_{k-1} = 1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{2(k-1)}$

$D_k = 1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{2k}$

tese: $D_{k+1} = 1 + b^2 + b^4 + \dots + b^{2(k+1)}$

$$D_{k+1} = \underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{\text{(K+1) colunas}} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{matrix}}\right\} \text{(k+1) linhas}$$

Aplicando-se Laplace na 1ª coluna, tem-se:

$D_{k+1} = (b^2+1).D_k + b.(-1)^3.D^{k'}$, sendo

$$D_{k'} = \underbrace{\left.\begin{vmatrix} b & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}\right\} \text{K linhas}}_{\text{K colunas}}$$

Aplicando-se Laplace na 1ª linha.

$DK' = b.\ D_{K-1}$

$D_{K+1} = (b^2 + 1).DK - b^2.\ D_{K-1}$

$DK_{+1} = (b^2 + 1).(1+ b^2 + b^4 +\ldots+ b^{2K}) - b^2(1 + b^2 + b^4 + \ldots + b2K-2)$

$D_{K+1} = 1+ b^2 + b^1+\ldots+ b^{2K+2}$ (conforme tese)

Assim, temos que:

$D_n = 1+ b^2 + b^4 + \ldots+ b^{2n}$

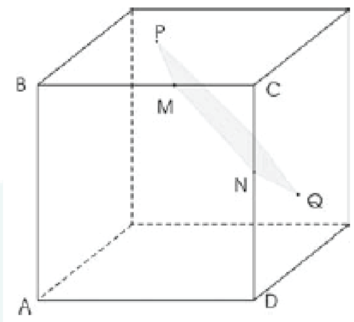
Que é a soma de uma P.G. que pode ser calculada por

$$D_n = \frac{q_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow \boxed{D_n = \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}}$$

Considere os pontos P e Q sobre faces adjacentes de um cubo. Uma formiga percorre, sobre a superfície do cubo, a menor distância entre P e Q, cruzando a aresta BC em M e a aresta CD em N, conforme ilustrado na figura a seguir. É dado que os pontos P, Q, M e N são coplanares.

A) **DEMONSTRE** que MN é perpendicular a AC .

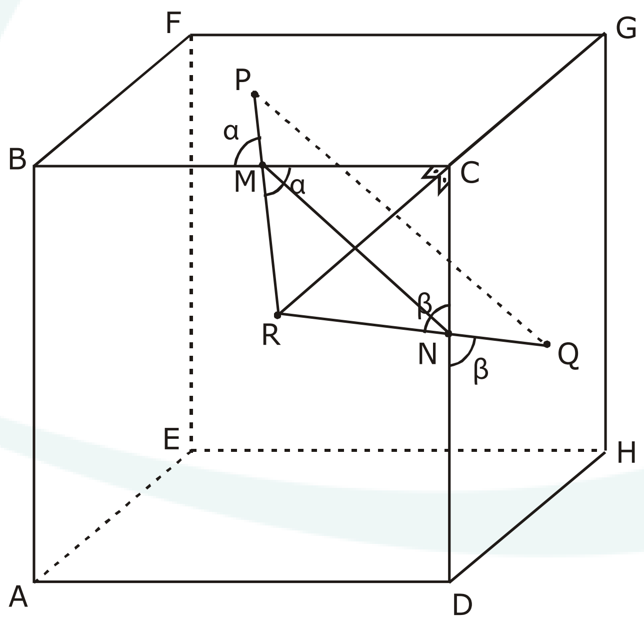
B) **CALCULE** a área da seção do cubo determinada pelo plano que contém P, Q e M em função de BC = a e BM = b.



RESOLUÇÃO:

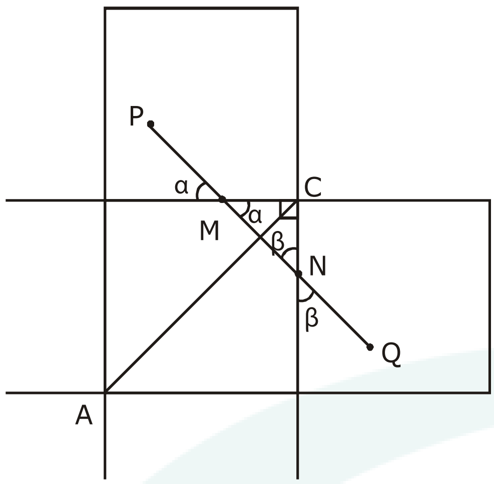
a)

fig. 1



Para que o caminho seja mínimo, planificando o cubo, os pontos P, M, N e Q estarão alinhados.

fig. 2



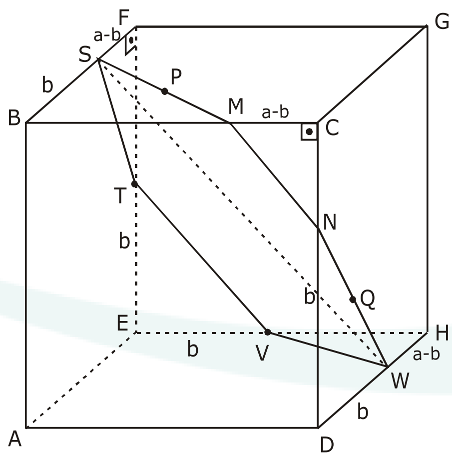
Sendo, P, M, N e Q coplanares as retas PM e QN são concorrentes (ponto R).

Como $\overrightarrow{PM} \subset pl\ (BCFG)$ e $\overleftrightarrow{QN} \subset pl\ (DCGH)$, então o ponto $R \in \overleftrightarrow{CG}$.

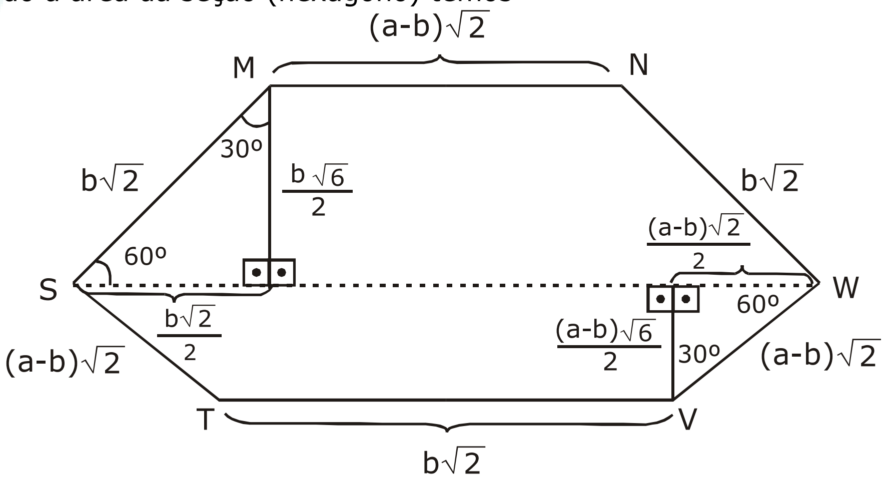
$$\left.\begin{array}{l} \text{Da fig.1 } (\Delta MCR)\ tg\alpha = \dfrac{RC}{MC} \\ \text{Da fig.2 } (\Delta MCN)\ tg\alpha = \dfrac{CN}{MC} \end{array}\right\} \Rightarrow RC = CN \Rightarrow \beta = 45^\circ\ (\text{fig.1}) \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Da figura 2, como $\alpha = \beta = 45^\circ$, o ΔMNC é isósceles e $AC \perp MN$.

b)



Calculando a área da seção (hexágono) temos



$SW = a\sqrt{2}$

$$A_{seção} = A_{SWMN} + A_{SWTV} = \frac{[(a-b)\sqrt{2} + a\sqrt{2}]}{2} \cdot \frac{b\sqrt{6}}{2} + \frac{(a\sqrt{2} + b\sqrt{2}).(a-b)}{2}\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\boxed{A_{seção} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(2ab + a^2 - 2b^2)}$$