

UNICAMP – 2005

2ª Fase

MATEMÁTICA

Matemática – Questão 01

São conhecidos os valores calóricos dos seguintes alimentos: uma fatia de pão integral, 55 kcal; um litro de leite, 550 kcal; 200 g de manteiga, 1 400 kcal; 1 kg de queijo, 3 200 kcal; uma banana, 80 kcal.

A) Qual o valor calórico de uma refeição composta por duas fatias de pão integral, um copo de 200 ml de leite, 10 g de manteiga, 4 fatias de queijo, de 10 g cada uma, e duas bananas ?

B) Um copo de leite integral contém 248 mg de cálcio, o que representa 31% do valor diário de cálcio recomendado. Qual é esse valor recomendado?

RESOLUÇÃO:

A) Por hipótese, temos os valores calóricos dos seguintes alimentos.

Assim, cada fatia de pão contém 55 kcal. Se um litro de leite contém 550 kcal, então 1 ml contém 0,55 kcal. Se 200 g de manteiga contém 1400 kcal, então 1 g contém 7 kcal. Se 1 kg de queijo contém 3 200 kcal, então 1 g contém 3,2 kcal e uma banana contém 80 kcal.

A refeição desejada terá um valor calórico, em kcal, igual a:

$$2(55) + 200(0,55) + 10(7) + 4 \cdot 10(3,2) + 2(80) = 110 + 110 + 70 + 128 + 160 = 578 \text{ kcal}$$

B) Seja K o valor diário de cálcio recomendado.

Assim, por hipótese, temos:

$$248 \text{ mg} = \frac{31}{100} \cdot K \Rightarrow k = \frac{248 \cdot 100}{31} \text{ mg} \Rightarrow k = 800 \text{ mg}$$

Matemática – Questão 02

A quantia de R\$ 1 280,00 deverá ser dividida entre 3 pessoas. Quanto receberá cada uma, se:

- A) A divisão for feita em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7?
- B) A divisão for feita em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10?

RESOLUÇÃO:

A) A quantia de R\$ 1 280,00 deverá ser dividida em partes diretamente proporcionais a 8, 5 e 7.

Seja x , y e z a parte que cada pessoa receberá após a divisão.

$$\text{Assim, } \frac{x}{8} = \frac{y}{5} = \frac{z}{7} = k \Rightarrow \frac{x+y+z}{8+5+7} = k \Rightarrow \frac{1280}{20} = k \Rightarrow k = 64.$$

Logo,

$$\frac{x}{8} = k \Rightarrow x = 8k \Rightarrow x = 8 \cdot 64 \Rightarrow x = 512,$$

$$\frac{y}{5} = k \Rightarrow y = 5k \Rightarrow y = 5 \cdot 64 \Rightarrow y = 320 \text{ e}$$

$$\frac{z}{7} = k \Rightarrow z = 7k \Rightarrow z = 7 \cdot 64 \Rightarrow z = 448.$$

B) A quantia de R\$ 1 280,00 deverá ser dividida em partes inversamente proporcionais a 5, 2 e 10.

Seja x , y e z a parte que cada pessoa receberá após a divisão.

Assim,

$$\frac{x}{\frac{1}{5}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\frac{1}{10}} = k \Rightarrow \frac{x+y+z}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10}} = k \Rightarrow$$

$$\frac{1280}{\frac{2+5+1}{10}} = k \Rightarrow \frac{1280}{\frac{8}{10}} = k \Rightarrow 1280 \cdot \frac{10}{8} \Rightarrow k = 1600$$

Logo,

$$\frac{x}{\frac{1}{5}} = k \Rightarrow x = \frac{1}{5} \cdot k \Rightarrow x = \frac{1}{5} \cdot 1600 \Rightarrow x = 320,$$

$$\frac{y}{\frac{1}{2}} = k \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot k \Rightarrow y = \frac{1}{2} \cdot 1600 \Rightarrow y = 800 \text{ e}$$

$$\frac{z}{\frac{1}{10}} = k \Rightarrow z = \frac{1}{10} \cdot k \Rightarrow z = \frac{1}{10} \cdot 1600 \Rightarrow z = 160.$$

Matemática – Questão 03

O custo de uma corrida de táxi é constituído por um valor inicial Q_0 , fixo, mais um valor que varia proporcionalmente à distância D percorrida nessa corrida. Sabe-se que, em uma corrida na qual foram percorridos 3,6 km, a quantia cobrada foi de R\$ 8,25, e que em outra corrida, de 2,8 km, a quantia cobrada foi de R\$ 7,25.

A) **CALCULE** o valor inicial Q_0 .

B) Se, em um dia de trabalho, um taxista arrecadou R\$ 75,00 em 10 corridas, quantos quilômetros seu carro percorreu naquele dia?

RESOLUÇÃO:

A) Por hipótese, o custo (C) de uma corrida de táxi é constituída de um valor inicial (Q_0), fixo, mais um valor que varia proporcionalmente a distância D percorrida nessa corrida.

Seja a , a constante proporcional.

Assim, $C(D) = Q_0 + a \cdot D$

Daí, $C(3,6) = Q_0 + a \cdot 3,6 \Rightarrow 8,25 = Q_0 + 3,6a$ e $C(2,8) = Q_0 + a \cdot 2,8 \Rightarrow 7,25 = Q_0 + 2,8a$.

Resultado do sistema $\begin{cases} 8,25 = Q_0 + 3,6a \\ 7,25 = Q_0 + 2,8a \end{cases}$

pelo método da adição temos:

$$\begin{cases} 8,25 = Q_0 + 3,6a \\ -7,25 = Q_0 - 2,8a \end{cases}$$
$$\hline 1 = 0,8a \Rightarrow 1 = \frac{8}{10}a \Rightarrow 1 = \frac{4}{5}a \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

Substituindo $a = \frac{5}{4}$ em $8,25 = Q_0 + 3,6a$, temos:

$$8,25 = Q_0 + 3,6 \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow \frac{825}{100} = Q_0 + \frac{360}{100} \cdot \frac{5}{4} \Rightarrow$$
$$\frac{825}{100} - \frac{450}{100} = Q_0 \Rightarrow Q_0 = \frac{375}{100} \Rightarrow Q_0 = 3,75.$$

Portanto, $C(D) = 3,75 + \frac{5}{4}D$.

B) Se o taxista arrecadou R\$ 75,00 em 10 corridas, então a distância D que ele percorreu em Km é

$$C(D) = 3,75 \cdot 10 + \frac{5}{4}D \Rightarrow 75 = 37,5 + \frac{5}{4}D \Rightarrow \frac{5}{4}D = 3,75 \Rightarrow D = \frac{37,5 \cdot 4}{5} \Rightarrow D = 30 \text{ km}$$

Matemática – Questão 04

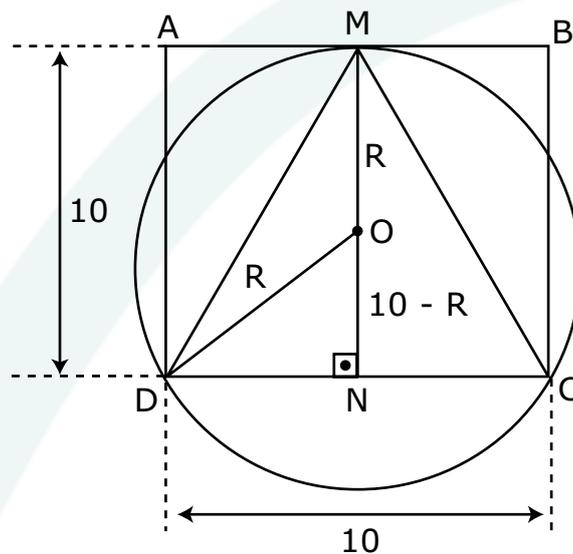
Sejam A, B, C e D os vértices de um quadrado cujos lados medem 10 cm cada. Suponha que a circunferência C passe pelos pontos C e D, que formam o lado CD do quadrado, e que seja tangente, no ponto M, ao lado oposto AB.

A) **CALCULE** a área do triângulo cujos vértices são C, D e M.

B) **CALCULE** o raio da circunferência C.

RESOLUÇÃO:

A) Por hipótese, temos a seguinte figura:



A área do triângulo CDM de base $CD = 10$ cm e altura $MN = 10$ cm, em que $N \in DC$, é

$$A_{\triangle CDM} = \frac{CD \cdot MN}{2} \Rightarrow A_{\triangle CDM} = \frac{10 \cdot 10}{2} \Rightarrow A_{\triangle CDM} = 50 \text{ cm}^2$$

B) Seja O o centro da circunferência e R o raio da circunferência.

Daí, trace $OM = R$.

Ora, $MN = 10 \Rightarrow NO + OM = 10 \Rightarrow NO + R = 10 \Rightarrow NO = 10 - R$.

Trace $OD = R$.

Como o segmento MN passa pelo centro da circunferência, então temos que N é o ponto médio de DC, pois o quadrado é simétrico em relação ao segmento MN.

$$\text{Logo, } ND = \frac{CD}{2} \Rightarrow ND = \frac{10}{2} \Rightarrow ND = 5 \text{ cm.}$$

Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo DNO, temos:

$$\begin{aligned} DO^2 &= DN^2 + NO^2 \Rightarrow R^2 = 5^2 + (10 - R)^2 \Rightarrow R^2 - (10 - R)^2 = 25 \Rightarrow \\ (R + 10 - R)(R - 10 + R) &= 25 \Rightarrow 10(2R - 10) = 25 \Rightarrow 2R - 10 = 2,5 \Rightarrow \\ 2R &= 12,5 \Rightarrow R = \frac{12,5}{2} \Rightarrow 6,25 \text{ cm} \end{aligned}$$

Matemática – Questão 05

Dois navios partiram ao mesmo tempo, de um mesmo porto, em direções perpendiculares e a velocidades constantes. Trinta minutos após a partida, a distância entre os dois navios era de 15 km e, após mais 15 minutos, um dos navios estava 4,5 km mais longe do porto que o outro.

A) Quais as velocidades dos dois navios, em km/h?

B) Qual a distância de cada um dos navios até o porto de saída, 270 minutos após a partida?

RESOLUÇÃO:

A) Seja V_1 , T_1 e D_1 , a velocidade, o tempo e a distância do navio número 1 (N_1)

Seja, V_2 , T_2 e D_2 , a velocidade, o tempo e a distância do navio número 2 (N_2).

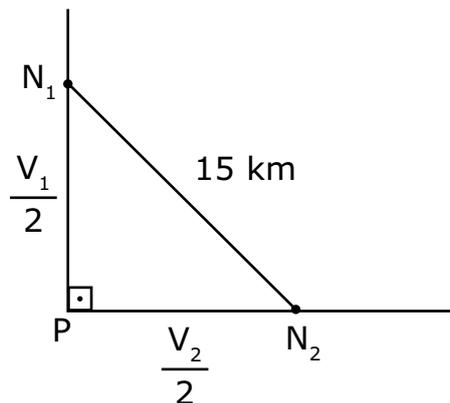
Seja $V_1 > V_2$.

Por hipótese, após 30 minutos, temos:

$$\begin{cases} D_1 = V_1 \cdot T_1 \Rightarrow D_1 = V_1 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow D_1 = \frac{V_1}{2} \text{ km} \\ D_2 = V_2 \cdot T_2 \Rightarrow D_2 = V_2 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow D_2 = \frac{V_2}{2} \text{ km} \end{cases}$$

Seja P o ponto de partida dos 2 navios .

Assim, após 30 minutos temos a seguinte figura:



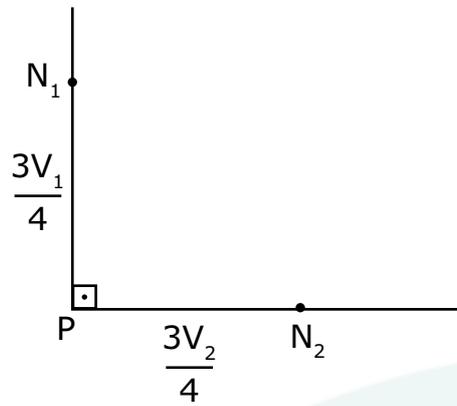
Daí, aplicando o Teorema de Pitágoras no $\Delta N_1 N_2 P$, temos:

$$N_1 N_2^2 = P N_1^2 + P N_2^2 \Rightarrow 15^2 = \left(\frac{V_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{V_2}{2}\right)^2 \Rightarrow 225 = \frac{V_1^2}{4} + \frac{V_2^2}{4} \Rightarrow V_1^2 + V_2^2 = 900 \cdot \text{(II)}$$

Por hipótese, após 45 minutos temos:

$$\begin{cases} D_1 = V_1 \cdot T_1 \Rightarrow D_1 = V_1 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow D_1 = \frac{3V_1}{4} \text{ km} \\ D_2 = V_2 \cdot T_2 \Rightarrow D_2 = V_2 \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow D_2 = \frac{3V_2}{4} \text{ km} \end{cases}$$

A figura correspondente é:



Por hipótese, temos:

$$N_1P = N_2P + 4,5 \Rightarrow \frac{3V_1}{4} = \frac{3V_2}{4} + 4,5 \Rightarrow 3V_1 = 3V_2 + 18 \Rightarrow V_1 = V_2 + 6 \quad (I)$$

Substituindo I em II, temos:

$$(V_2 + 6)^2 + V_2 = 900 \Rightarrow V_2 + 12V_2 + 36 + V_2^2 - 900 = 0$$

$$2V_2 + 12V_2 - 864 \Rightarrow V_2^2 + 6V_2 - 432 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-432)$$

$$\Delta = 36 + 1728$$

$$\Delta = 1764$$

$$V_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - \Delta}}{2a}$$

$$V_2 = \frac{-6 \pm 42}{2 \cdot 1}$$

$$V_2 = -3 \pm 21$$

$$V_2 = 18 \text{ Km/h}$$

pois não existe velocidade negativa.

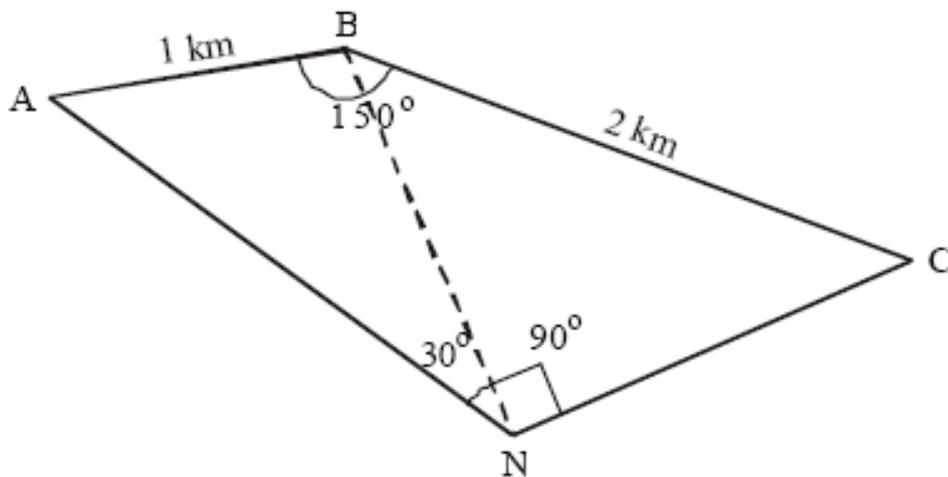
Assim, substituindo $V_2 = 18 \text{ km/h}$ na equação I, temos $V_1 = 18 + 6 \Rightarrow V_1 = 24 \text{ Km/h}$.

B) Após 270 minutos, ou 4,5 horas a distância de cada navio ao porto é:

$$D_1 = V_1 T_1 \Rightarrow D_1 = 24 \cdot 4,5 \Rightarrow 108 \text{ km/h e } D_2 = V_2 T_2 \Rightarrow D_2 = 18 \cdot 4,5 \Rightarrow 81 \text{ km/h}$$

Matemática – Questão 06

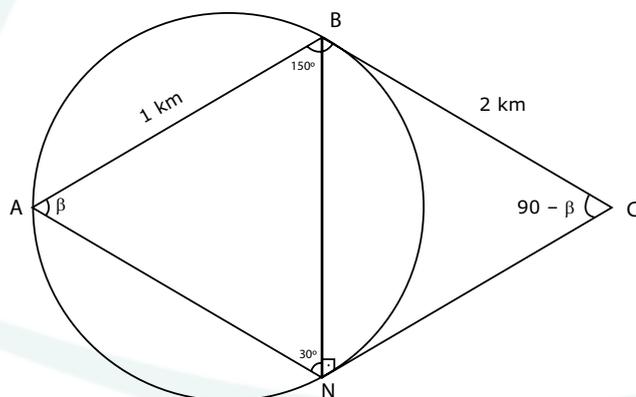
Sejam A, B, C e N quatro pontos em um mesmo plano, conforme mostra a figura ao lado.



- A) **CALCULE** o raio da circunferência que passa pelos pontos A, B e N.
B) **CALCULE** o comprimento do segmento NB.

RESOLUÇÃO:

A) Por hipótese temos a seguinte figura



Seja o raio de circunferência que possa por, A, B e N.

Aplicando a lei dos senos no ΔABN , temos:

$$\frac{AB}{\sin 30^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2R \Rightarrow 2 = 2R \Rightarrow R = 1 \text{ km}$$

B) Seja β o ângulo \widehat{BAN} .

Aplicando a lei dos senos no ΔABN , temos

$$\frac{BN}{\sin \beta} = 2R \Rightarrow BN = 2 \cdot 1 \cdot \sin \beta \Rightarrow BN = 2 \sin \beta. \quad (I)$$

No quadrilátero ABCN, temos:

$$\begin{aligned} S_i = 360^\circ &\Rightarrow \beta + 150^\circ + \widehat{C} + (30^\circ + 90^\circ) = 360^\circ \Rightarrow \\ \widehat{C} &= 360^\circ - 270^\circ - \beta \Rightarrow \widehat{C} = 90^\circ - \beta. \end{aligned}$$

Do triângulo retângulo BNC, temos:

$$\operatorname{sen}(90^\circ - \beta) = \frac{BN}{BC} \Rightarrow \cos \beta - 0 = \frac{BN}{2} \Rightarrow BN = 2 \cos \beta \quad (\text{II})$$

Igualando I e II, temos:

$$2 \operatorname{sen} \beta = 2 \cos \beta \Rightarrow \frac{\operatorname{sen} \beta}{\cos \beta} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \beta = 1 \Rightarrow \beta = 45^\circ, \text{ pois } 0 < \beta < 180^\circ$$

Logo, substituindo $\beta = 45^\circ$ na equação I, temos:

$$BN = 2 \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \Rightarrow BN = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \text{ km}$$

Matemática – Questão 07

Um capital de R\$ 12 000,00 é aplicado a uma taxa anual de 8%, com juros capitalizados anualmente. Considerando que não foram feitas novas aplicações ou retiradas, **ENCONTRE**:

A) O capital acumulado após 2 anos.

B) O número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital acumulado seja maior que o dobro do capital inicial. [Se necessário, use $\log_{10} 2 = 0,301$ e $\log_{10} 3 = 0,477$].

RESOLUÇÃO:

A) Um capital (C) de R\$ 12 000,00, aplicado a uma taxa anual (i) de 8%, durante um tempo (t) em anos terá um montante (M) em reais de $M = C(1 + i)^t \Rightarrow M = 12000(1 + 0,08)^2 \Rightarrow M = 12000(1,08)^2 \Rightarrow M = 1200 \cdot 1,1664 \Rightarrow M = 13 996,80$ reais.

B) Seja t um número inteiro mínimo de anos necessários para que o capital inicial acumulado seja maior que o dobro do capital inicial.

Assim

$$C(1 + i)^t > 2C \Rightarrow (1 + 0,08)^t > 2 \Rightarrow$$

$$(1,08)^t > 2 \Rightarrow \log(1,08)^t > \log 2 \Rightarrow$$

$$t \log(1,08) > \log 2 \Rightarrow t \log\left(\frac{108}{100}\right) > \log 2 \Rightarrow$$

$$t \log\left(\frac{27}{25}\right) > \log 2 \Rightarrow t (\log 27 - \log 25) > \log 2 \Rightarrow$$

$$t(3 \log 3^3 - 2 \log 5^2) > \log 2 \Rightarrow$$

$$t\left(3 \log 3 - 2 \log \frac{10}{2}\right) > \log 2 \Rightarrow$$

$$t[3 \log 3 - 2(\log 10 - \log 2)] > \log 2 \Rightarrow$$

$$t[3 \log 3 - 2(1 - \log 2)] > \log 2 \Rightarrow$$

$$t[3 \log 3 - 2 + 2 \log 2] > \log 2 \Rightarrow$$

$$t[3 \cdot 0,477 - 2 + 2 \cdot 0,301] > 0,301 \Rightarrow$$

$$t[1,431 - 2 + 0,602] > 0,301 \Rightarrow$$

$$t[0,033] > 0,301 \Rightarrow t > \frac{0,301}{0,033} \Rightarrow t > 9,12 \Rightarrow$$

t = 10, pois é o menor inteiro mínimo.

Matemática – Questão 08

A função $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é chamada **função quadrática**.

A) **ENCONTRE** a função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos $A(0,2)$, $B(-1,1)$ e $C(1,1)$.

B) Dados os pontos $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, **MOSTRE** que, se $x_0 < x_1 < x_2$ e se os pontos A, B e C não pertencem a uma mesma reta, então existe uma única função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos A, B e C.

RESOLUÇÃO:

A)

Se os pontos $A(0,2)$, $B(-1,1)$ e $C(1,1)$ pertencem à Função quadrática $y=ax^2+bx+c$, em que $a \neq 0$, então:

$$y=ax^2+bx+c \Rightarrow \begin{cases} 2 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \\ 1 = a(-1)^2 + b(-1) + c \\ 1 = a(1)^2 + b(1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = c & \text{(I)} \\ 1 = a - b + c & \text{(II)} \\ 1 = a + b + c & \text{(III)} \end{cases}$$

Substituindo I em II e III, temos:

$$\begin{cases} 1 = a - b + 2 \\ 1 = c + b + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = a - b \\ -1 = a + b \\ -2 = 2a \\ -1 = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = -1 - b \\ 0 = -b \\ 0 = b \end{cases}$$

Resolvendo o sistema anterior, temos:

$$a = -1, b = 0 \text{ e } c = 2.$$

$$\text{logo, } y = -x^2 + 0x + 2 \Rightarrow y = -x^2 + 2$$

B)

Se os pontos $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$ pertencem à função quadrática $y=ax^2+bx+c$, em que $a \neq 0$, então, temos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} ax_0^2 + bx_0 + c = y_0 \\ ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \end{cases}$$

Ora, o determinante o sistema linear anterior é:

$$D = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 & 1 \\ x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^2 & x_2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0^2 & x_0 \\ x_1^2 & x_1 \\ x_2^2 & x_2 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$D = x_0^2 x_1 + x_0 x_2^2 + x_1^2 x_2 - (x_0 x_1^2 + x_0^2 x_2 + x_1 x_2^2) \Rightarrow$$

$$D = x_0^2 x_1 + x_0 x_2^2 + x_1^2 x_2 - (x_0 x_1^2 - x_0^2 x_2 - x_1 x_2^2) \Rightarrow$$

$$D = x_0^2 (x_1 - x_2) + x_1^2 (x_2 - x_0) + x_2^2 (x_0 - x_1) \Rightarrow$$

$$D =$$

·
·
·

$$D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Como $x_0 < x_1 < x_2$, então $D \neq 0$ e, portanto, o sistema linear é possível e determinado.

Logo, temos uma única solução para o sistema linear.

Como os pontos A, B e C não são colineares, então na equação $y = ax^2 + bx + c$, o valor de a é diferente de zero ($a \neq 0$).

Portanto, existe uma única função quadrática cujo gráfico passa pelos pontos A, B e C

Matemática – Questão 09

Com as letras x , y , z e w podemos formar monômios de grau k , isto é, expressões do tipo $x^p y^q z^r w^s$, onde p , q , r e s são inteiros não-negativos, tais que $p + q + r + s = k$. Quando um ou mais desses expoentes é igual a zero, dizemos que o monômio é formado pelas demais letras. Por exemplo, $y^3 z^4$ é um monômio de grau 7 formado pelas letras y e z [nesse caso, $p = s = 0$].

A) Quantos monômios de grau 4 podem ser formados com, no máximo, 4 letras?

B) Escolhendo-se ao acaso um desses monômios do item (a), qual a probabilidade dele ser formado por exatamente duas das 4 letras?

RESOLUÇÃO:

A) A partir da expressão $x^p y^q z^r w^s$, queremos formar monômios de grau 4, com no máximo 4 letras.

Assim queremos $p + q + r + s = 4$.

Vamos escrever uma sequência de quatro 1's e três b's.

$$\text{Logo, } 1 \ b \ 1 \ 1 \ b \ 1 \Rightarrow 1 + 0 + 2 + 1 = 4$$

$$b \ b \ 1 \ 1 \ 1 \ b \ 1 \Rightarrow 0 + 0 + 3 + 1 = 4$$

$$b \ b \ b \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \Rightarrow 0 + 0 + 0 + 4 = 4$$

$$\text{Portanto, temos } PR(7;3,4) = \frac{7!}{3!4!} \Rightarrow PR(7;3,4) = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3!4!} \Rightarrow PR(7;3,4) = 35.$$

B) As possibilidades do monômio ter exatamente duas das 4 letras é se os expoentes forem 1 e 3 ou 2, 2 ou 3 e 1, ou seja, 3 possibilidades.

Ora, das quatro letras x , y , z e w queremos duas quais quer.

$$\text{Logo, } 3 \cdot C_{4,2} = 3 \cdot \binom{4}{2} = 3 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2!2!} = 3 \cdot 2 \cdot 3 = 18.$$

Portanto, temos 18 possibilidades de monômios.

Logo, a probabilidade de P é:

$$p = \frac{\text{Eventos Favoráveis}}{\text{Total de Eventos}} \Rightarrow p = \frac{18}{35}$$

Matemática – Questão 10

Um número complexo $z = x + iy$, $z \neq 0$, pode ser escrito na forma trigonométrica: $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, onde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos\theta = x/|z|$ e $\operatorname{sen}\theta = y/|z|$. Essa forma de representar os números complexos não-nulos é muito conveniente, especialmente para o cálculo de potências inteiras de números complexos, em virtude da fórmula de De Moivre:

$$\left[|z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)\right]^k = |z|^k (\cos k\theta + i \operatorname{sen} k\theta)$$

que é válida para todo $k \in \mathbb{Z}$. Use essas informações para:

a) Calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$

b) Sendo $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$, calcular o valor de $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{15}$.

RESOLUÇÃO:

a)

Vamos calcular $(\sqrt{3} + i)^{12}$ usando as informações seja $Z = \sqrt{3} + i$.

$$\text{Logo, } |Z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} \Rightarrow |Z| = \sqrt{3+1} \Rightarrow |Z| = \sqrt{4} \Rightarrow |Z| = 2$$

$$\text{Ora, } \left. \begin{array}{l} \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

Assim, $Z = \sqrt{3} + i$ pode ser escrito como

$$Z = 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$\text{Logo, } Z^{12} = 2^{12} [\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ]^{12} \Rightarrow$$

$$Z^{12} = 4096 [\cos (12 \cdot 30) + i \operatorname{sen} (12 \cdot 30)] \Rightarrow$$

$$Z^{12} = 4096 [\cos 360^\circ + i \operatorname{sen} 360^\circ] \Rightarrow$$

$$Z^{12} = 4096 [1 + i \cdot 0] \Rightarrow$$

$$Z^{12} = 4096 [1] \Rightarrow$$

$$Z^{12} = 4096$$

b)

Ora, $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^{15}$ é uma soma de uma progressão geométrica em que $a_1 = 1$, $q = z$ e $a_{15} = z^{15}$

Ora, $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ é a soma de uma P.G.

$$\text{Logo, } s_{16} = \frac{1(Z^{16} - 1)}{Z - 1} \Rightarrow S_{16} = \frac{Z^{16} - 1}{Z - 1}$$

Vamos escrever $Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ na forma trigonométrica.

$$\text{Assim, } |z| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{4}{4}} \Rightarrow |z| = 1$$

Ora,

$$\left. \begin{aligned} \cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{1}} &\Rightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{sen} \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{1}} &\Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Logo, $\left[Z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right]^{16} \Rightarrow$

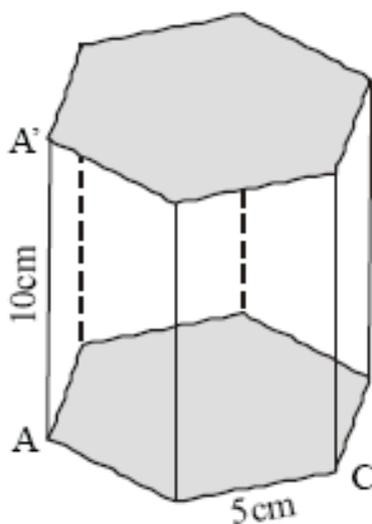
$$Z^{16} \left[\cos 16 \cdot \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 16 \cdot \frac{\pi}{4} \right] \Rightarrow Z^{16} = \cos 4\pi + i \operatorname{sen} 4\pi \Rightarrow$$

$$Z^{16} = 1 + i \cdot 0 \Rightarrow Z^{16} = 1$$

Assim, $1 + Z + Z^2 + \dots + Z^{15} = \frac{Z^{16} - 1}{Z - 1} = \frac{1 - 1}{\cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{0}{\left(\cos \frac{\pi}{4} + 1 \right) + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}} = 0$

Matemática – Questão 11

A figura a seguir apresenta um prisma reto cujas bases são hexágonos regulares. Os lados dos hexágonos medem 5 cm cada um e a altura do prisma mede 10 cm.



A) **CALCULE** o volume do prisma.

B) **ENCONTRE** a área da secção desse prisma pelo plano que passa pelos pontos A, C e A'.

RESOLUÇÃO:

A) Seja V o volume do prisma reto.

Daí, o volume é o produto da base (AB) pela altura (h) do prisma.

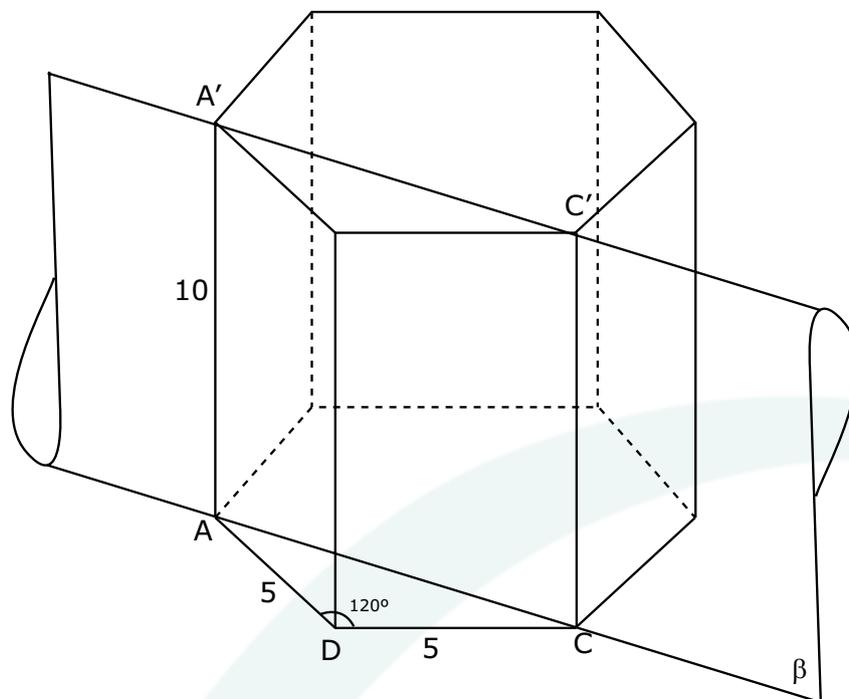
Logo,

$$V = AB \cdot h \Rightarrow V = \left(6 \cdot \frac{\ell^2 \sqrt{3}}{4} \right) \cdot 10 \Rightarrow$$

$$V = 3 \cdot \frac{5^2 \sqrt{3}}{2} \cdot 10 \Rightarrow 375\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

OBS.: A área da base do prisma reto é constituída de 6 triângulos equiláteros.

B)



O plano β que passa pelos pontos $A'ACC'$ que intersecta o prisma reto, forma um retângulo $A'ACC'$ de base AC e altura $A'A$.

Aplicando a lei do cossenos no $\triangle ADC$, temos:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cdot \cos\theta \Rightarrow AC^2 = 5^2 + 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ \Rightarrow$$

$$AC^2 = 50 - 50\left(-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow AC^2 = 50 + 25 \Rightarrow AC = \sqrt{75} \Rightarrow AC = 5\sqrt{3} \text{ cm.}$$

Assim, a área (A) do retângulo $A'ACC'$ é $A = AC \cdot AA' \Rightarrow A = 5\sqrt{3} \cdot 10 \Rightarrow A = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Matemática – Questão 12

Para resolver equações do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, podemos proceder do seguinte modo: como $x = 0$ não é uma raiz, divide-se a equação por x^2 e, após fazer a mudança de variáveis $u = x + \frac{1}{x}$ resolve-se a equação obtida [na variável u].

Observe que, se $x \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, então ≥ 2 .

A) **ACHE** as 4 raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

B) **ENCONTRE** os valores de $b \in \mathbb{R}$ para os quais a equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz real positiva.

RESOLUÇÃO:

A) Vamos determinar as 4 raízes de equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$, seguindo as orientações do enunciado da questão. Assim:

$$\begin{aligned}\frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^3}{x^2} + \frac{4x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} &= \frac{0}{x^2} \Rightarrow \\ x^2 - 3x + 4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} &= 0 \Rightarrow \\ \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 &= 0 \Rightarrow \\ \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 4 &= 0\end{aligned}$$

Fazendo uma mudança de variável, em que $m = x + \frac{1}{x}$, temos:

$$\begin{aligned}(m^2) - 2 - 3(m) + 4 &= 0 \Rightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Rightarrow \\ \Delta &= b^2 - 4ac & m &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} & m_1 &= \frac{3+1}{2} \Rightarrow m_1 = 2 \\ \Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 & m &= \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} & m_2 &= \frac{3-2}{2} \Rightarrow m_2 = 1 \\ \Delta &= 9 - 8 \\ \Delta &= 1 & m &= \frac{-3 \pm 1}{2}\end{aligned}$$

Logo, para $m_1 = 2$, temos:

$$\begin{aligned}2 &= x + \frac{1}{x} \Rightarrow \\ \frac{2x}{x} &= \frac{x^2 + 1}{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow \\ |x - 1| &= 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \text{ ou } -(x - 1) = 0 \\ x &= 1 \quad \text{ou} \quad x - 1 = 0 \\ x &= 1 \\ \text{Para } m_2 &= 1, \text{ temos } 1 = x + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{x}{x} = \frac{x^2}{x} \Rightarrow\end{aligned}$$

$$x^2 - x + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac & x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} & x_1 &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \Delta &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 & x &= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} & x_2 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ \Delta &= 1 - 4 \\ \Delta &= -3 & x &= \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}\end{aligned}$$

Portanto, as quatro raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$ é:

$$\left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1, 1 \right\}$$

B) Os valores $b \in \mathbb{R}$ tais que a equação $x^4 - 3x^3 + bx^2 - 3x + 1 = 0$ tenha pelo menos uma raiz real positiva é:

$$\frac{x^4}{x^2} - \frac{3x^3}{x^2} + \frac{bx^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{0}{x^2} \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + b - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0 \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + b = 0$$

Fazendo uma mudança de variável, em que $m = x + \frac{1}{x}$, temos:

$$m^2 - 2 - 3m + b = 0 \Rightarrow m^2 - 3m + (b - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{3 + \sqrt{17 - 4b}}{2}$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b - 2)$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{17 - 4b}}{2 \cdot 1}$$

$$m_2 = \frac{3 - \sqrt{17 - 4b}}{2}$$

$$\Delta = 9^2 - 4b + 8$$

$$\Delta = 17 - 4b$$

Por hipótese, $m \geq 2$.

Daí,

$$m_1 \geq 2 \Rightarrow \frac{3 + \sqrt{17 - 4b}}{2} \geq 2 \Rightarrow 3 + \sqrt{17 - 4b} \geq 4 \Rightarrow$$

$$\sqrt{17 - 4b} \geq 1 \Rightarrow 17 - 4b \geq 1 \Rightarrow -4b \geq 1 - 17 \Rightarrow$$

$$-4b \geq -16 \times (-1) \Rightarrow 4b \leq 16 \Rightarrow b \leq 4 \quad \text{(I)}$$

$$\text{De } m_1 = \frac{3 + \sqrt{17 - 4b}}{2}, \text{ como } b \in \mathbb{R}, \text{ então } 17 - 4b \geq 0 \Rightarrow -4b \geq -17 \times (-1) \Rightarrow 4b \leq 17 \Rightarrow b \leq \frac{17}{4} \quad \text{(II)}$$

Assim, de I e II temos $b \leq 4$.

$$\text{De } m_2 = \frac{3 - \sqrt{17 - 4b}}{2} \text{ temos que:}$$

$$17 - 4b \geq 0 \Rightarrow -4b \geq -17 \times (-1) \Rightarrow 4b \leq 17 \Rightarrow b \leq \frac{17}{4}$$

$$\forall b \leq \frac{17}{4} \Rightarrow m_2 \leq \frac{3}{2}$$

O que é um absurdo, pois por hipótese $m \geq 2$.

Portanto, de I e II tem o $b \leq 4$.